Les suite réelles.

5.0

Table des matières

Suite convergentes

I

1. Objectif

Vous découvrirez dans ce chapitre ;

- comment converge une suite .
- La Convergence et suite bornée.

2. Définition

Définition

Soit $u = (u_n) \in R^N$. On dit que la suite

est convergente lorsqu'il existe l \in R tel que

$\forall \epsilon > 0, \exists M \in N, \forall n \in N, (n > N \rightarrow |u_n - l| < \epsilon)$.

Remarque

On a les équivalences :

"Aussi petit que soit \epsilon strictement positif, il existe un rang a partir duquel les terme de la suite (u_n) sont dans l'intervalle $]l - \epsilon, l + \epsilon[$".

Théoreme :

Soit $(u_n)_{n \in N} \in R^N, l, l' \in R$.
Si $(u_n)_{n \in N}$ converge vers l etl' , alors $l = l'$.

Proposition :

Soit $(u_n)_{n \in N} \in R^N$ et $l' \in R$. On a les équivalences

Exemple

La suite $n \rightarrow 2 - 1 \div n$ converge vers 2.

3. Convergence et suite bornée

Théoréme

Si une suite $(u_n)_{n\in N}$ converge , alors elle est bornée.

4. La notion de limite ne dépend pas des premiers termes

Proposition :

Soient $(u_n)_{n\in N}, (v_n)_{n\in N} \in R^N$. Si u, v sont égale à partir d'un certain rang, alors elle sont de même nature , et si elles convergent , c'est vers la même limite.

5.
Exercice :

A) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 \in]0, 1]$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{4} + \frac{3}{4}$$

1. Montrer que :$\forall n \in N, u_n > 1.$
1. Montrer que :$\forall n \in N, u_n \leq 2$
2. Montrer que la suite est monotone. En déduire que la suite est convergente .
3. Déterminer la limite de la suite$(u_n)_{n\geq 0}$.

B) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 \in]0, 1]$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4}$$

1. Montrer que :$\forall n \in N, u_n > 0.$
2. Montrer que :$\forall n \in N, u_n \leq$
3. Montrer que la suite est monotone. En déduire que la suite est convergente .
4. Déterminer la limite de la suite$(u_n)_{n\geq 0}$.

C) On considère la suite$(u_n)_{n\in N}$ définie par$u_0 = 0$ et par la relation de récurrence :

$$2u_n^2 + \frac{1}{8}$$

Montrer que la suite$(u_n)_{n\in N}$ est convergente et déterminer sa limite.

D) Soit$(u_n)_{n\in N}l$a suite définie par récurrence par $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1.$$

Montrer que la suite$(u_n)_{n\in N}$ est convergente et déterminer sa limite.

6. Test de sortie

Soit$(u_n)_{n\in N}$a suite définie par récurrence par $u_0 = \frac{3}{2}$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in N$,$1 < u_n < 2$
2. Montrer queu_n est strictement monotone.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in N}$ est convergente et déterminer sa limite.