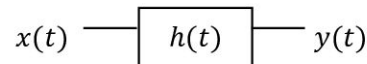


Système Linéaire Invariant dans le Temps	2
Produit de convolution normal	2
Propriétés de la convolution	3
Commutativité	3
Associativité	3
Distributivité	3
Elément neutre – Convolution avec une impulsion de Dirac	3
Convolution avec un peigne de Dirac	4
Transformée de Fourier de la convolution	4
Interprétation graphique de la convolution	5
Fonction de Corrélation	6
Intercorrélation & Autocorrélation	6
Propriétés de la fonction de corrélation	6
Densité spectrale de puissance	7

Système Linéaire Invariant dans le Temps

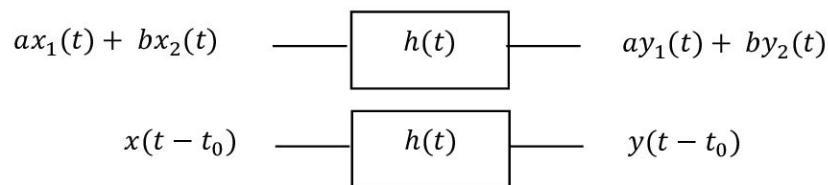
Soit le Système Linéaire Invariant dans le Temps (SLIT) de la figure ci-dessous.



La réponse $y(t)$ à ce système, de réponse impulsionnelle $h(t)$, pour l'entrée $x(t)$, est donnée par :

$$y(t) = x(t) * h(t).$$

Le système est LIT si:



Un système peut être caractérisé par sa réponse impulsionnelle. Si on connaît la réponse impulsionnelle d'un système, alors on peut connaître sa sortie pour n'importe quelle entrée.

La convolution est liée aux systèmes LIT. En effet, la sortie est définie comme étant le produit de convolution entre le signal à l'entrée et la réponse impulsionnelle du système.

Produit de convolution normal

La convolution permet de calculer la sortie d'un système en fonction de l'entrée et la réponse impulsionnelle.

La convolution peut être donnée comme suit :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau ;$$

$h(t - \tau)$ est obtenue à partir de $h(\tau)$ par un rabattement autour de l'axe $\tau = 0$ suivi d'une translation de t .

La convolution est donc une méthode pour combiner deux signaux et en produire un troisième.

C'est la technique la plus importante en traitement de signaux.

L'intégrale précédente est appelée intégrale de convolution ; elle permet d'associer à toute entrée $x(t)$ la sortie du système $y(t)$, celui-ci étant caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h(t)$.

Propriétés de la convolution

La convolution est commutative, associative et distributive. En effet, pour trois signaux $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ nous avons ce qui suit.

Commutativité

$$a(t) * b(t) = b(t) * a(t) ;$$

Associativité

$$(a(t) * b(t)) * c(t) = a(t) * (b(t) * c(t)) ;$$

Distributivité

$$a(t) * (b(t) + c(t)) = a(t) * b(t) + a(t) * c(t) ;$$

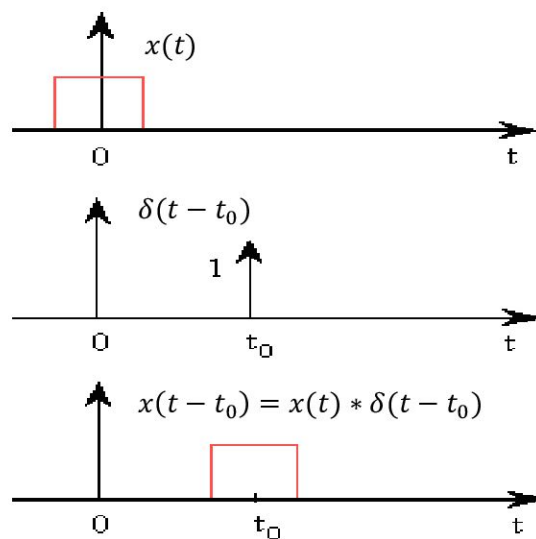
Elément neutre - Convolution avec une impulsion de Dirac

La convolution avec une impulsion de Dirac est donnée par :

$$x(t) * \delta(t) = x(t) ;$$

Pour une un signal translaté dans le temps, nous avons :

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) ;$$

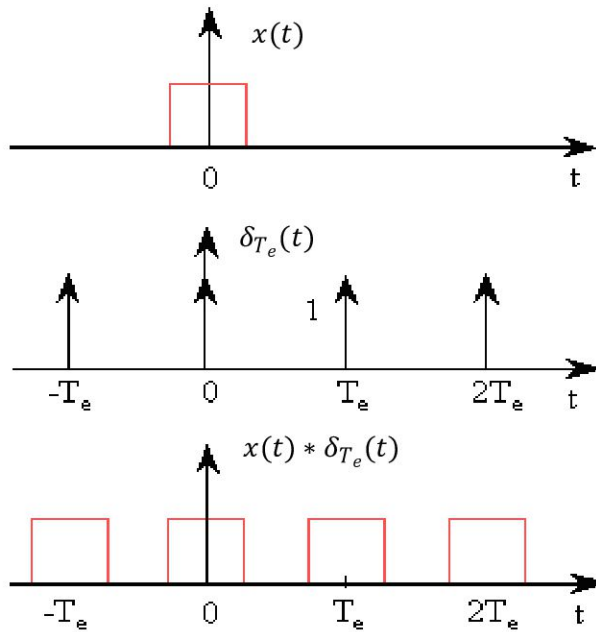


Convolution avec un peigne de Dirac

La convolution d'un signal quelconque $x(t)$ avec un peigne de Dirac est donnée par :

$$x(t) * \delta_{T_e}(t) = x(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) * \delta(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_e) ;$$

Convolver un signal $x(t)$ par un peigne de Dirac revient à périodiser le signal $x(t)$ à la période T_e .



Transformée de Fourier de la convolution

La convolution dans le domaine temporel est un produit normal dans le domaine fréquentiel.

Soit $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux signaux.

$$x_1(t) = TF^{-1}[X_1(f)] ;$$

$$x_2(t) = TF^{-1}[X_2(f)] ; \text{ Alors :}$$

$$x_1(t) * x_2(t) = TF^{-1}[X_1(f)X_2(f)] ; \text{ De plus :}$$

$$x_1(t) \cdot x_2(t) = TF^{-1}[X_1(f) * X_2(f)] ;$$

- ⇒ Le produit normal dans le domaine temporel est un produit de convolution dans le domaine fréquentiel ;
- ⇒ Le produit de convolution dans le domaine temporel est un produit normal dans le domaine fréquentiel.

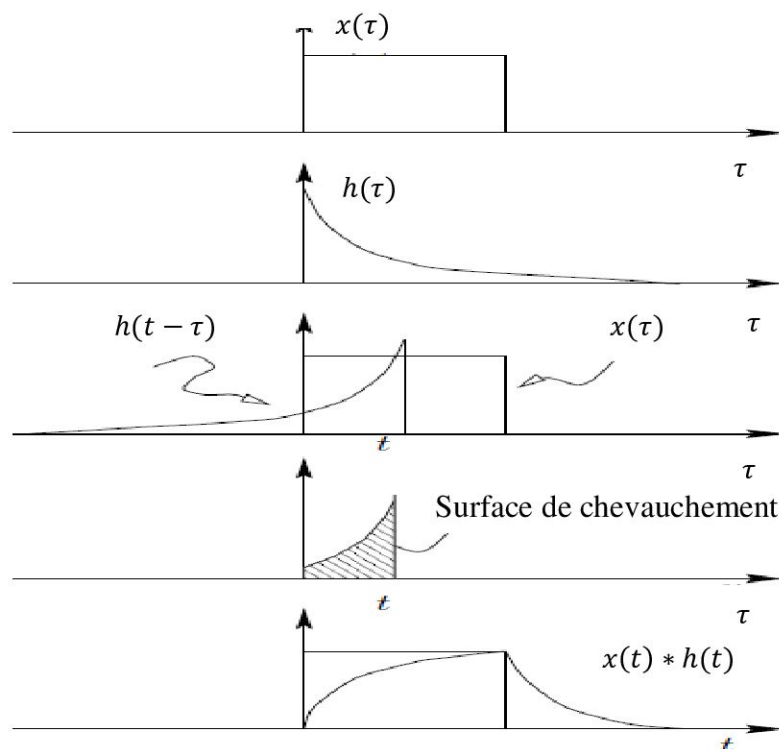
Dérivation

Si $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont deux fonctions dérivables, alors, d'après la propriété de dérivation de la transformée de Fourier, nous avons :

$$j2\pi f X_1(f) \cdot X_2(f) = X_1(f) \cdot j2\pi f X_2(f) \Rightarrow \frac{dx_1(t)}{dt} * x_2(t) = x_1(t) * \frac{dx_2(t)}{dt}$$

Interprétation graphique de la convolution

Le calcul de la convolution consiste donc à calculer la surface du produit $x(\tau)h(t - \tau)$. Le signal $h(t - \tau)$ est simplement le signal initial $h(\tau)$, retourné dans le temps pour donner $h(-\tau)$, puis translaté de t . En calculant les surfaces remportées en faisant « déplacer » $h(t - \tau)$, c'est-à-dire pour tous les décalages de t , on obtient le produit de convolution pour tout t comme le montre la figure suivante :



Fonction de Corrélation

La fonction de corrélation est la mesure de similarité entre deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Intercorrélation & Autocorrélation

En fonction de la nature des signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$, on distingue plusieurs types de la fonction de corrélation. Ces derniers sont résumés dans le tableau suivant :

Classification énergétique	Périodique / Apériodique	Complexe / Réel	Relation entre $x_1(t)$ et $x_2(t)$	Corrélation
Énergie finie	Apériodique	Réel	$x_1(t) \neq x_2(t)$	$R_{x_1x_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t + \tau) dt$
Énergie finie	Apériodique	Complexe	$x_1(t) \neq x_2(t)$	$R_{x_1x_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2^*(t + \tau) dt$
Énergie finie	Apériodique	Réel	$x_1(t) = x_2(t) = x(t)$	$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x(t + \tau) dt$
Énergie finie	Apériodique	Complexe	$x_1(t) = x_2(t) = x(t)$	$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t + \tau) dt$
Puissance moyenne finie	Apériodique	Réel	$x_1(t) \neq x_2(t)$	$R_{x_1x_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_1(t) x_2(t + \tau) dt$
Puissance moyenne finie	Apériodique	Complexe	$x_1(t) \neq x_2(t)$	$R_{x_1x_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_1(t) x_2^*(t + \tau) dt$
Puissance moyenne finie	Apériodique	Réel	$x_1(t) = x_2(t) = x(t)$	$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) x(t + \tau) dt$
Puissance moyenne finie	Apériodique	Complexe	$x_1(t) = x_2(t) = x(t)$	$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) x^*(t + \tau) dt$
Puissance moyenne finie	Périodique de même période	Réel	$x_1(t) \neq x_2(t)$	$R_{x_1x_2}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_1(t) x_2(t + \tau) dt$
Puissance moyenne finie	Périodique de même période	Complexe	$x_1(t) \neq x_2(t)$	$R_{x_1x_2}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_1(t) x_2^*(t + \tau) dt$
Puissance moyenne finie	Périodique	Réel	$x_1(t) = x_2(t) = x(t)$	$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) x(t + \tau) dt$
Puissance moyenne finie	Périodique	Complexe	$x_1(t) = x_2(t) = x(t)$	$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) x^*(t + \tau) dt$

Propriétés de la fonction de corrélation

1. L'autocorrélation est homogène à une énergie. C'est-à-dire :

$$R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt ;$$

2. La fonction d'autocorrélation est maximum en 0 ;
3. La fonction d'autocorrélation est à symétrie hermitienne. C'est-à-dire :

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}^*(-\tau) ;$$

Pour le cas complexe, nous avons :

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}^*(-\tau) ;$$

4. Pour le cas d'un signal périodique :

a) La fonction d'autocorrélation est périodique de période égale à celle du signal ;

b) $R_{xx}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (x(t))^2 dt = P$; C'est à dire, l'autocorrélation pour $\tau = 0$ est la puissance moyenne P ;

c) La fonction d'autocorrélation est une fonction paire de τ .

Densité spectrale de puissance

La densité spectrale de puissance est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation. Elle montre la force des variations (énergie) en fonction de la fréquence. En d'autres termes, elle montre à quelles fréquences les variations sont fortes et à quelles fréquences les variations sont faibles. Elle est donnée par :

$$S_{xx}(f) = TF[R_{xx}(\tau)] ;$$

La paire de la transformée de Fourier caractérisant la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance est donnée par :

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) e^{j2\pi\tau f} df ;$$

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi\tau f} d\tau .$$