Université de Mohamed BOUDIAF – Msila
Faculté de Technologie
Département d'Electronique

Matière : Traitement Avancé du Signal 01
M1 – Instrumentation

Chapitre 1 - Partie 3 :
Rappels sur les filtres analogiques

Pr. Khaled ROUABAH

Année universitaire 2023/2024

Dimensionnement des filtres analogiques - Butterworth

Gain d'un filtre

$G(f) = |H(f)|^2$ *H(f)* est la réponse en fréquence du filtre

$G_{dB}(f) = 10log_{10}|H(f)|^2$

Atténuation d'un filtre

$A(f) = \frac{1}{G(f)}$ $A_{dB}(f) = -G_{dB}(f)$

Filtre de Butterworth

Un filtre de Butterworth d'ordre N est défini par sa fonction d'atténuation donnée par:

$A(f) = 1 + \varepsilon^2 \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2N}$. Pour une fréquence normalisée par rapport à f_c, nous avons:

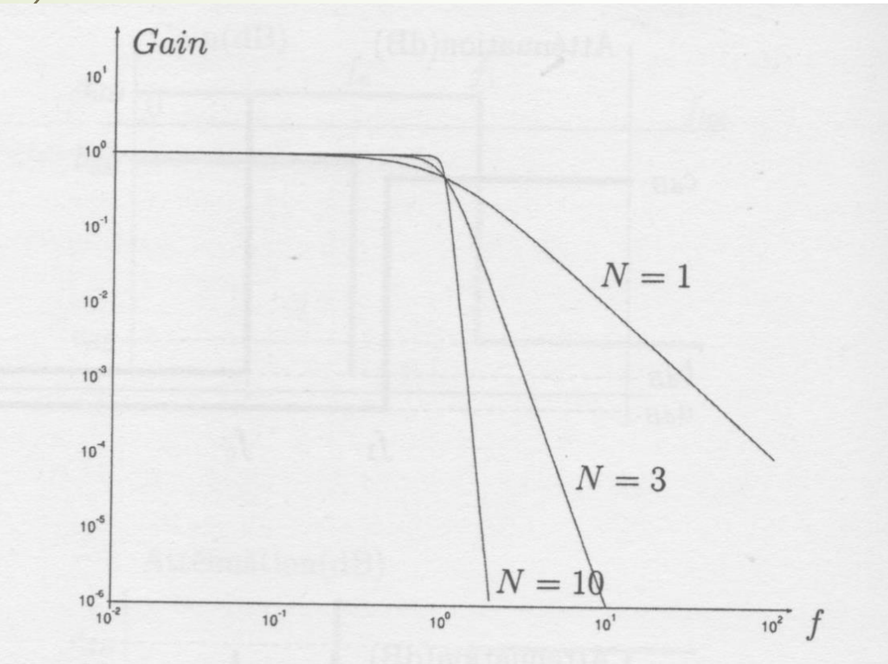
ε est une constante caractérisant l'atténuation dans la bande passante.

- ➔ Le filtre de Butterworth est un filtre qui possède un gain très constant dans sa bande passante;
- ➔ Il est appelé filtre méplat.

Dimensionnement des filtres analogiques - Butterworth

Filtre de Butterworth - Propriétés

- l'atténuation est très régulière. De tous les filtres polynomiaux d'ordre N, le filtre de Butterworth est celui qui a l'atténuation la plus *plate* au voisinage de 0 (toutes les dérivées jusqu'à l'ordre $2N-1$ sont nulles en $f=0$).
- la pente croît avec N. Elle est égale à $2N$ en $f=1$.



Dimensionnement des filtres analogiques - Butterworth

Filtre de Butterworth - Propriétés

- l'atténuation en puissance dans la bande passante est d'autant plus constante que N est grand,
- l'atténuation en puissance dans la bande coupée est d'autant plus importante que N est grand.

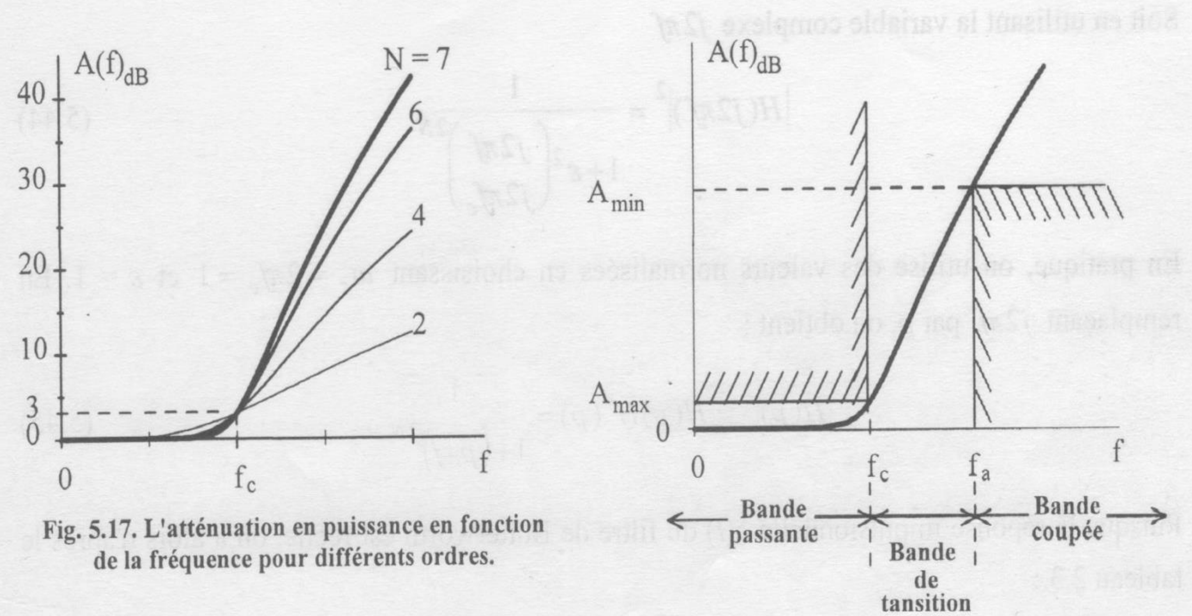


Fig. 5.17. L'atténuation en puissance en fonction de la fréquence pour différents ordres.

L'ordre minimal N_{min} du filtre entrant dans le gabarit est

$$N_{min} \geq \frac{\log\left(\dfrac{10^{0,1A_{min}}-1}{10^{0,1A_{max}}-1}\right)}{2\log\left(\dfrac{f_a}{f_c}\right)}$$

Il faut noter aussi que toutes les courbes passent par le point $(f_c, 3\ dB)$

Dimensionnement des filtres analogiques - Tchebychev

Filtre de Tchebychev

➔ Le filtre de Tchebychev a une atténuation en puissance dans la bande coupante très importante;

➔ Il a une bande de transition très faible;

➔ Un filtre Tchebychev d'ordre N est définie par: $A(f) = 1 + \varepsilon^2 T_N^2 \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2N}$

➔ ε est une constante réelle positive caractérisant l'ondulation dans la bande passante;

➔ $T_N(x)$ est le polynôme de Tchebychev définie par:

$$T_N(x) = 2xT_{N-1}(x) - T_{N-2}(x)$$

$T_0 = 1$ et $T_1 = x$, ou par les relations

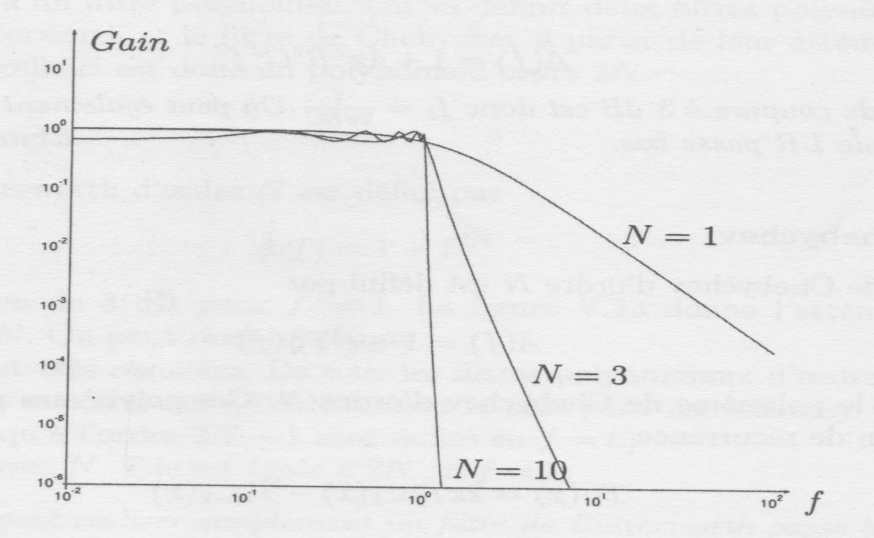
$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N\arccos(x)) & si \;\; |x| \leq 1 \\ \mathrm{ch}(N\mathrm{arch}(x)) & si \;\; |x| > 1 \end{cases}$$

$T_N\ (x)$ est le polynôme de Tchebychev d'ordre *N*

Dimensionnement des filtres analogiques - Tchebychev

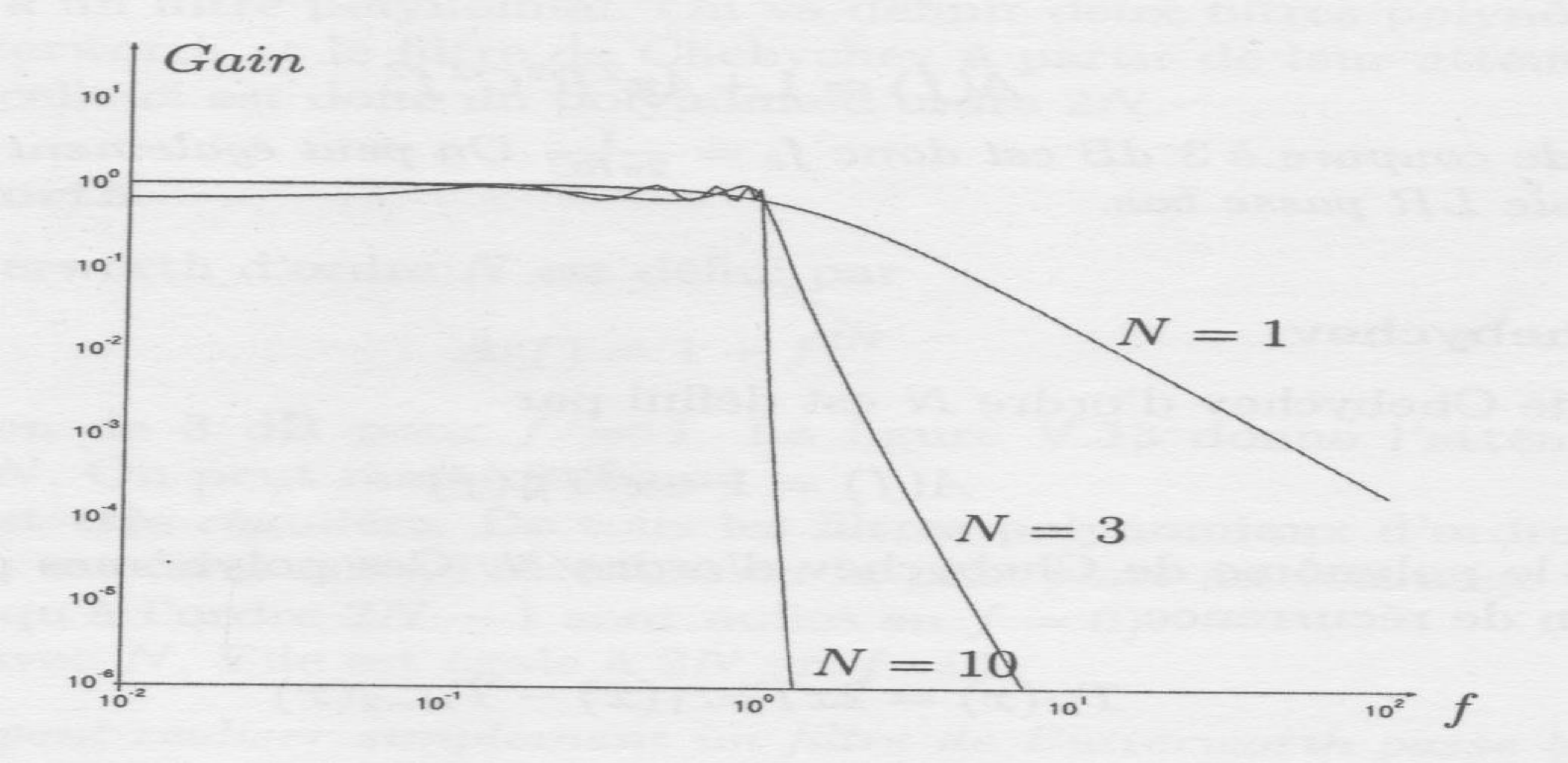
Filtre de Tchebychev – Propriétés

- l'atténuation oscille dans la bande passante ($|f| < 1$). Dans la bande fréquentielle $[0, 1]$, $A(f)$ possède N extrema prenant alternativement les valeurs 1 et $1 + \epsilon^2$.
- l'atténuation est régulière dans la bande atténuée.
- la pente croît avec N. On peut montrer que de tous les filtres polynômiaux d'ordre N, les filtres de Chebychev sont ceux pour lesquels la pente est la plus forte dans la bande de transition.



Dimensionnement des filtres analogiques - Tchebychev

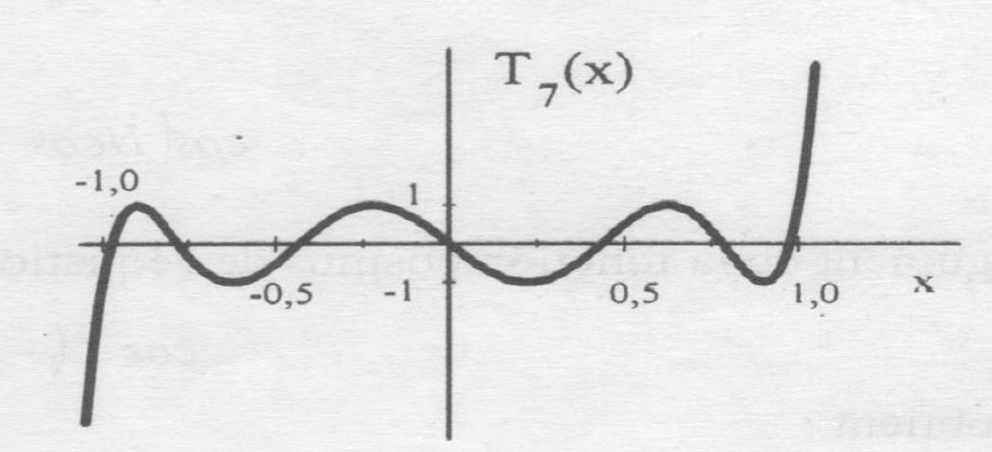
Filtre de Tchebychev – Propriétés

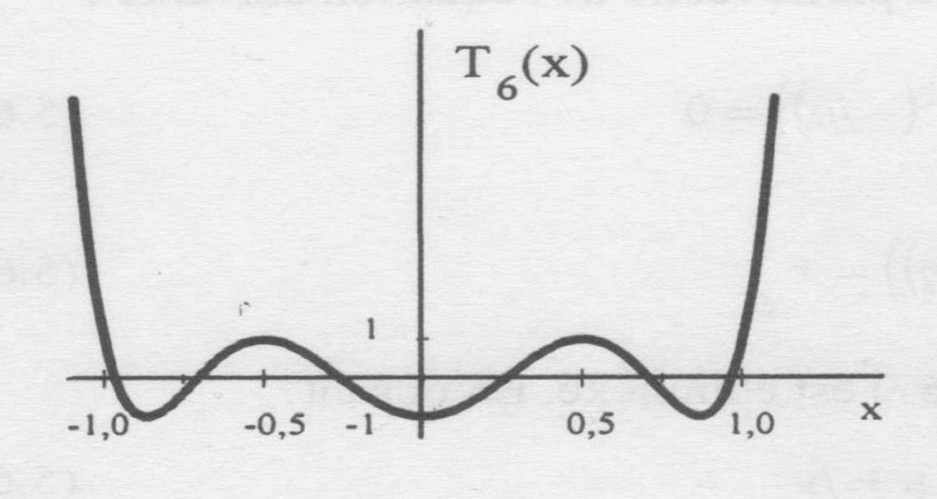


Dimensionnement des filtres analogiques - Tchebychev

Filtre de Tchebychev – Propriétés

$T_N(0)$	$=$	0	*pour N impair*
$T_N(0)$	$=$	$(-1)^{N/2}$	*pour N pair*
$T_N(-1)$	$=$	1	*pour N pair*
$T_N(-1)$	$=$	-1	*pour N impair*
$T_N(1)$	$=$	1	*pour $\forall$ N*
$T_N(x)$	$=$	$T_N(-x)$	*pour N pair*
$T_N(x)$	$=$	$-T_N(-x)$	*pour N impair*



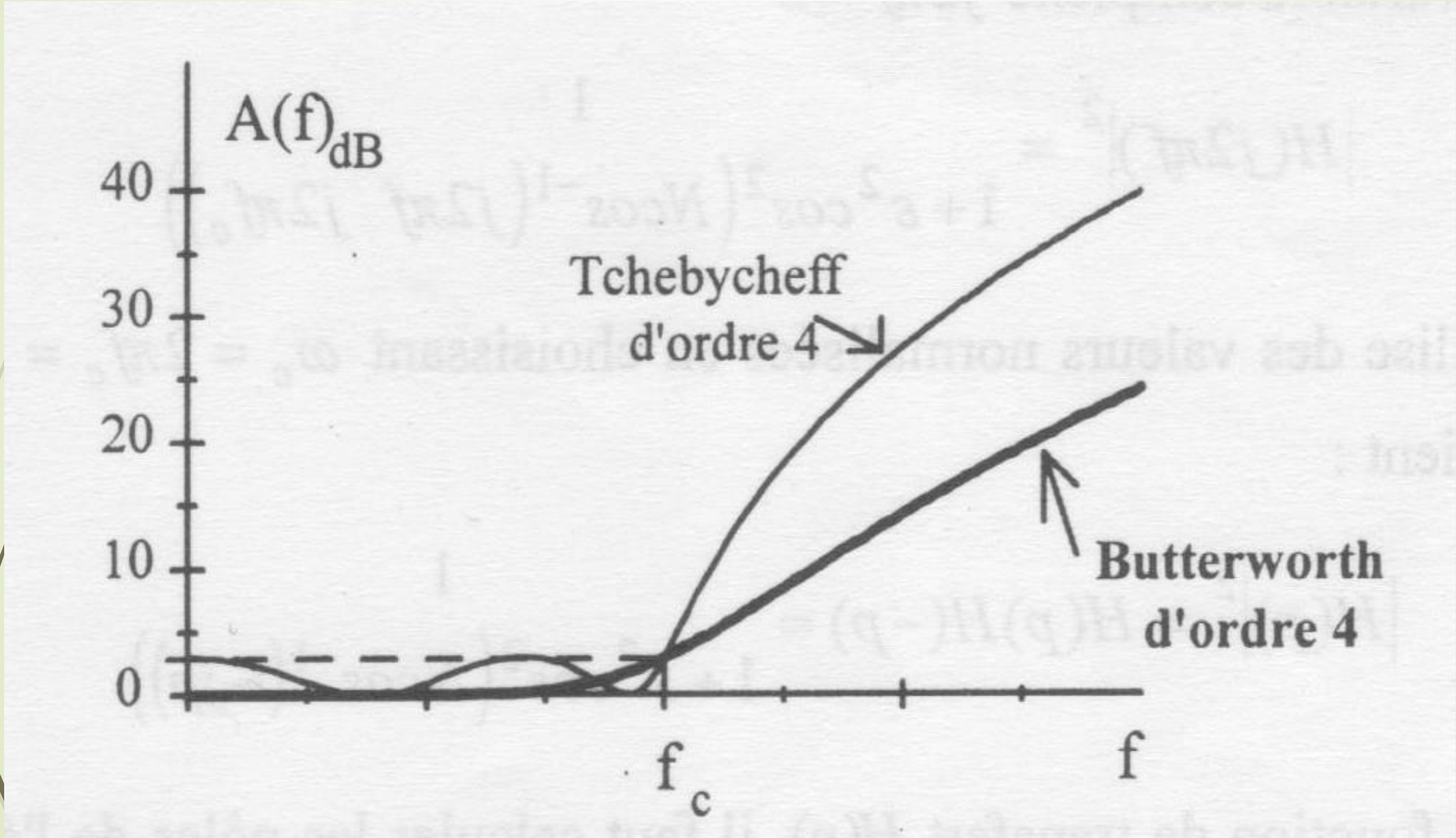


L'ordre minimal N_{min} du filtre entrant dans le gabarit est

$$N_{min} \geq \frac{\cosh^{-1}\sqrt{\dfrac{10^{0,1A_{min}}-1}{10^{0,1A_{max}}-1}}}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{f_a}{f_c}\right)}$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1A_{max}}-1}$$

Filtre de Butterwoth vs filtre de Tchebychev



Dimensionnement des filtres analogiques – Bessel

Le filtre de Bessel possède la propriété de minimiser la distorsion d'un signal complexe. Il est basé sur les polynômes de Bessel donné par :

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k s^k)$$

Les coefficients a_k sont calculés comme suit :

$$a_k = \frac{(2n-k)!}{2^{n-k} k!(n-k)!}$$

pour $k = 0, 1, \ldots, n$.

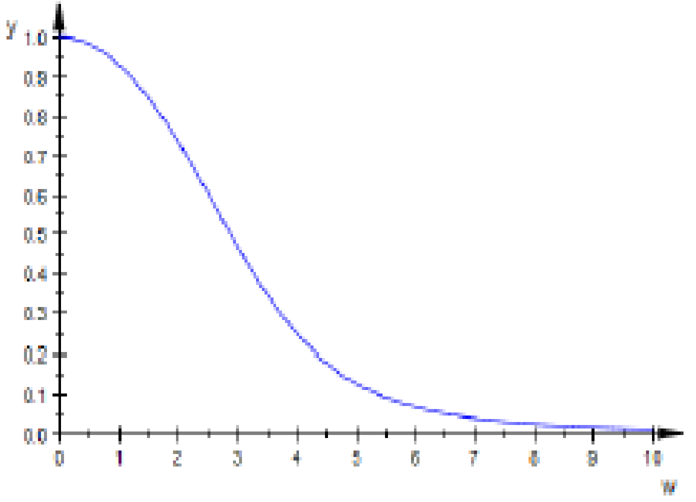
- Exemple $(N = 4)$:

$$a_k = \frac{(8-k)!}{2^{4-k} k!(4-k)!}$$

pour $a_0 = 105,\ a_1 = 105,\ a_2 = 45,\ a_3 = 10,\ a_4 = 1.$

$$H_4(s) = \frac{105}{s^4 + 10s^3 + 45s^2 + 105s + 105}$$

- Réponse en fréquence :



Dimensionnement des filtres analogiques – elliptique (Cauer)

C'est un filtre à équi-ondulation à la fois dans la bande passante et dans la bande coupée.

$$\left|H(j\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 R_n^{\,2}(\Omega)}$$

Le filtre elliptique donne un ordre minimal pour un gabarit donné.

La fonction rationnelle $R_n(\Omega)$ est à optimiser utilisant des outils informatiques.

$R_n(\Omega)$ est déterminée par quatre paramètres : l'ordre du filtre N, la fréquence délimitant la bande passante Ω_s, l'ondulation en bande passante e et l'ondulation en bande atténuée A.

Elliptic Approximation Functions for $A_{max} = 0.5$ dB

n	A_{min}	Numerator constant K	Numerator of $F(s)$	Denominator of $F(s)$
		(a) $\Omega_s = 1.5$		
2	8.3	0.38540	$s^2 + 3.92705$	$s^2 + 1.03153s + 1.60319$
3	21.9	0.31410	$s^2 + 2.80601$	$(s^2 + 0.45286s + 1.14917)(s + 0.766952$
4	36.3	0.015397	$(s^2 + 2.53555)(s^2 + 12.09931)$	$(s^2 + 0.25496s + 1.06044)(s^2 + 0.92001s + 0.47183)$
5	50.6	0.019197	$(s^2 + 2.42551)(s^2 + 5.43764)$	$(s^2 + 0.16346s + 1.03189)(s^2 + 0.57023s + 0.57601)(s + 0.42597)$
		(b) $\Omega_s = 2.0$		
2	13.9	0.20133	$s^2 + 7.4641$	$s^2 + 1.24504s + 1.59179$
3	31.2	0.15424	$s^2 + 5.15321$	$(s^2 + 0.53787s + 1.14849)(s + 0.69212)$
4	48.6	0.0036987	$(s^2 + 4.59326)(s^2 + 24.22720)$	$(s^2 + 0.30116s + 1.06258)(s^2 + 0.88456s + 0.41032)$
5	66.1	0.0046205	$(s^2 + 4.36495)(s^2 + 10.56773)$	$(s^2 + 0.19255s + 1.03402)(s^2 + 0.58054s + 0.52500)(s + 0.392612)$
		(c) $\Omega_s = 3.0$		
2	21.5	0.083974	$s^2 + 17.48528$	$s^2 + 1.35715s + 1.55532$
3	42.8	0.063211	$s^2 + 11.82781$	$(s^2 + 0.58942s + 1.14559)(s + 0.65263)$
4	64.1	0.00062046	$(s^2 + 10.4554)(s^2 + 58.471)$	$(s^2 + 0.32979s + 1.063281)(s^2 + 0.86258s + 0.37787)$
5	85.5	0.00077547	$(s^2 + 9.8955)(s^2 + 25.0769)$	$(s^2 + 0.21066s + 1.0351)(s^2 + 0.58441s + 0.496388)(s + 0.37452$

Fonction de transfert - Laplace

Un filtre analogique est caractérisé par sa fonction de transfert en *p* ou en *s* qui est la transformée de Laplace de sa réponse impulsionnelle.

$$H(s) = \frac{\sum_{i=0}^{M} a_i s^i}{\sum_{j=0}^{N} b_j s^j} \qquad avec\ M \leq N$$

La fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre deux est donnée par :

$$H(s) = \frac{a_0}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}$$

L'ordre du filtre est donné par le degré de son dénominateur *N*.

Un filtre d'ordre N quelconque (N>2) peut être réalisé par la mise en cascade de plusieurs filtres d'ordres 2 et 1.

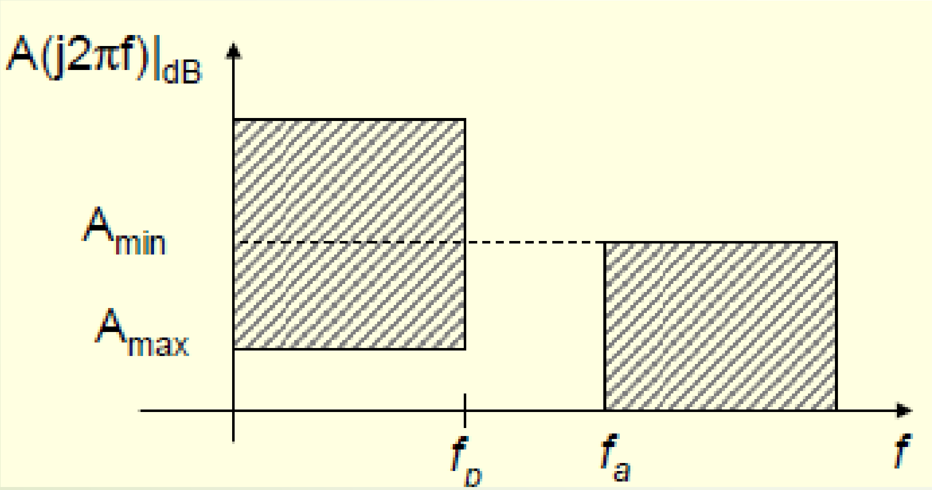
Filtre prototype

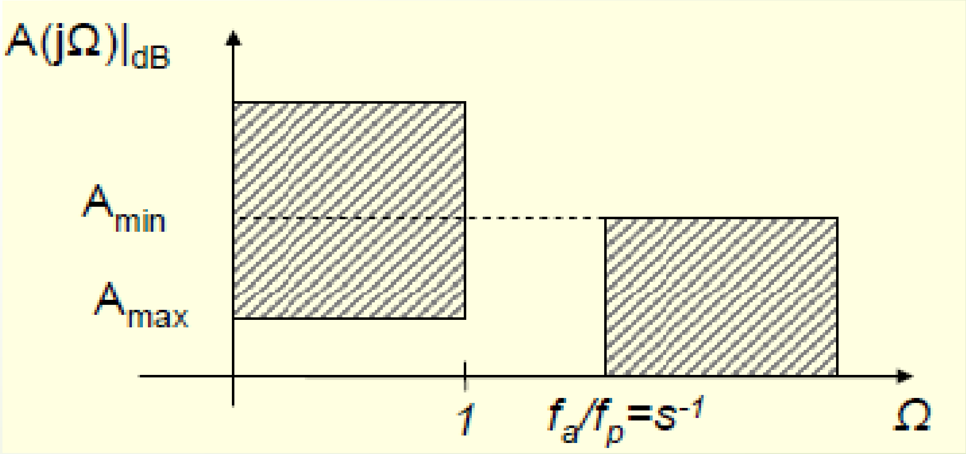
➔ C'est un filtre passe-bas utilisé pour obtenir les autres types de filtres;
➔ Le gabarit prototype est normalisé suivant w par rapport à une fréquence de normalisation.

$$\Omega := f_n = \frac{f}{f_r} = \frac{\omega}{\omega_r}$$

Pour un filtre passe-bas, nous avons: $f_r = f_p$

Gabarit du filtre prototype





Transformation de fréquence

La plupart des filtres peuvent se construire à partir du filtre passe-bas normalisé (De fréquence de coupure unité) avec une transformation de fréquence.

$$p = f(\tilde{p}) \quad \Rightarrow \quad \tilde{H}^{\mathcal{L}}(\tilde{p}) = H^{\mathcal{L}}_{\text{normalisé}}(p)\big|_{p=f(\tilde{p})}$$

Type de filtre	Fréquence(s) de coupure	$f(\tilde{p})$	$\tilde{H}^{\mathcal{L}}(\tilde{p})$
Passe-bas	ω_c	$\dfrac{\tilde{p}}{\omega_c}$	$H^{\mathcal{L}}_{\text{normalisé}}\left(\dfrac{\tilde{p}}{\omega_c}\right)$
Passe-haut	ω_c	$\dfrac{\omega_c}{\tilde{p}}$	$H^{\mathcal{L}}_{\text{normalisé}}\left(\dfrac{\omega_c}{\tilde{p}}\right)$
Passe-bande	$\omega_{c1}, \omega_{c2} \quad (\omega_{c2} > \omega_{c1})$	$\dfrac{\tilde{p}^2 - \omega_{c1}\omega_{c2}}{\tilde{p}(\omega_{c2} - \omega_{c1})}$	$H^{\mathcal{L}}_{\text{normalisé}}\left(\dfrac{\tilde{p}^2 - \omega_{c1}\omega_{c2}}{\tilde{p}(\omega_{c2} - \omega_{c1})}\right)$
Coupe-bande	$\omega_{c1}, \omega_{c2} \quad (\omega_{c2} > \omega_{c1})$	$\dfrac{\tilde{p}(\omega_{c2} - \omega_{c1})}{\tilde{p}^2 - \omega_{c1}\omega_{c2}}$	$H^{\mathcal{L}}_{\text{normalisé}}\left(\dfrac{\tilde{p}(\omega_{c2} - \omega_{c1})}{\tilde{p}^2 - \omega_{c1}\omega_{c2}}\right)$