Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté de Mathématiques et d'informatiques
Département de Mathématiques
Module: Introduction à la Topologie

L2 : *Semestre 03*
Série 01 : *Espaces topologiques*
Année : *2023-2024*

Exercice 01 : Soit $E = \{a, b, c, d\}$

1. Déterminer les topologie dans les familles suivantes : $\tau_1 = \{\emptyset, E, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}\}$, $\tau_2 = \{\emptyset, E, \{a\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}\}$, $\tau_3 = \{\emptyset, E, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$.
2. Dans les cas de topologie, trouver les fermés ?

Exercice 02 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $I_\alpha =]\alpha; +\infty[$ et $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, I_\alpha, (\alpha \in \mathbb{R})\}$,

1. Montrer que $(\mathbb{R}, \tau)$ est un espace topologique ?
2. Comparer entre τ et la topologie usuelle de $\mathbb{R}$?

Exercice 03 : Soit $E = \{a, b, c, d\}$ muni de la topologie $\tau = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$.

1. Vérifier que τ est une topologie ?
2. Les parties $\{a\}, \{a, b\}$ sont elles fermés ?

Exercice 04 : Soit $\mathbb{R}$ muni de la Topologie suivante : $\tau = \{\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}, \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}} \cup \mathbb{N}, \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}} \cup \mathbb{Z}, \mathbb{R}\}$, et soit $D = \{3, \sqrt{3}\}$.

1. Déterminer : $\mathcal{V}(D), D', \mathcal{F}r(D), \mathcal{E}xt(D)$.
2. Montrer que D est partout dense dans $\mathbb{R}$. Conclure ?
3. Comparer entre la Topologie induite $\tau_{\mathbb{Z}}$ et la Topologie grossière de $\mathbb{Z}$?

Exercice 05 : Déterminer l'intérieur et l'adhérence de :

$A = \{-1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$
$B =]-1, 1[\cup \{2\} \cup [3, 4[$
$C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 4\} \cap [1, 5[$
$D = \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$

Exercice 06 : Soit (E, τ) un espace topologique. On muni E^2 de la topologie produit.
Montrer que : E est séparé $\Longleftrightarrow \triangle$ est fermé dans E^2.
où $\triangle = \{(x; x) : x \in E\}$ (le diagonale de E^2).

Exercice 07 : Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. On définit la fonction $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ comme suivant :

$$\forall f, g \in E : d(f, g) = |f(0) - g(0)| + \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt$$

1. Montrer que d est une distance sur E ?
2. Donner des éléments de la boule d'unité dans (E, d) ?

Exercice 08 : Soit $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, et soit $f : \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$ telle que :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & : \ x = -\infty \\ \dfrac{x}{1 + |x|} & : \ x \in \mathbb{R} \\ 1 & : \ x = +\infty \end{cases}$$

Montrer que $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ définit une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$, et trouver $B(0, 1), \overline{B}(0, 1)$.

Exercice 09 : Soit U une partie non vide de $\mathbb{R}$, muni de la topologie usuelle $(\mathbb{R}, |.|)$. On dnit :

$-U = \{-x : x \in U\}$
$\lambda U = \{\lambda x : x \in U\}$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$
$a + U = \{a + x : x \in U\}$ $(a \in \mathbb{R})$

Montrer que :

1. U ouvert $\Leftrightarrow -U$ ouvert.
2. U ouvert $\Leftrightarrow \lambda U$ ouvert.
3. U ouvert $\Leftrightarrow a + U$ ouvert.

Exercice 10 : Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$. On appelle une norme sur E une application

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

telle que : $\begin{cases} \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in E : \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, & \text{(Homogénéité)}, \\ \forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x + y\|, & \text{(Inégalité triangulaire)}. \end{cases}$

Soit $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$, définie par $d(x, y) = \|x - y\|, \forall x, y \in E$.
Montrer que d est une distance sur E ?

Exercice 11 :(hors TD)

1. Soit E et F deux espaces topologiques (F est séparé), $\psi : E \longrightarrow F$ est une application, son graphe est
$$\Gamma = \Big\{(x, \psi(x)) \setminus x \in E\Big\} \subset E \times F$$
Montrer que, si ψ est continue, Γ est fermé dans $E \times F$, la réciproque étant fausse (considérer $E = F = \mathbb{R}$ et $\psi : x \longmapsto \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, avec $\psi(0) = 0$) ?
2. On munit $\mathbb{R}$ de la distance
$$d(x, y) = \Big|\arctan x - \arctan y\Big|$$
i) Comparer cette distance à $d_1(x, y) = |x - y|$?
ii) Montrer que $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet (considérer la suite $u_n = n$) ?

Exercice 12 :(hors TD)

1. Soit f une forme linéaire continue sur l'espace vectoriel normé E et l'hyperplan $H = \ker f$; pour $x \notin H$ montrer que $d(x, H) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}$?
2. On définit sur l'espace de Banach $(E, \|\cdot\|_\infty)$ avec $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, l'application suivante $\varphi : E \longrightarrow E$ par :
$$\varphi(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{4 + t^2}\, dt$$
i) Montrer que $\forall x \in [0, 1]$: $\arctan x \leq x$?
ii) Sachant que $\arctan x = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1 + t^2}\, dt$, montrer que l'équation $\varphi(f) - f = 0$ admet une solution unique dans E ?