Exercice 01 : $E=\{a,b,c,d\}$.

1. Nous déterminons les topologies dans les familles suivantes :
   i) $\tau_1=\{\emptyset,E,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\}\}$:
   $*)$ $\emptyset,E\in\tau_1$,
   $**)$ $\forall\mathcal{O}\in\tau_1:\emptyset\cap\mathcal{O}=\emptyset\in\tau_1, E\cap\mathcal{O}=\mathcal{O}\in\tau_1$,
   $\{a\}\cap\{c,d\}=\emptyset\in\tau_1,\ \{a\}\cap\{a,c,d\}=\{a\}\in\tau_1, \{c,d\}\cap\{a,c,d\}=\{c,d\}\in\tau_1$
   $***)$ $\forall\mathcal{O}\in\tau_1:\emptyset\cup\mathcal{O}=\mathcal{O}\in\tau_1, E\cup\mathcal{O}=E\in\tau_1, \{a\}\cup\{c,d\}=\{a,c,d\}\in\tau_1$,
   $\{a\}\cup\{a,c,d\}=\{a,c,d\}\in\tau_1, \{c,d\}\cup\{a,c,d\}=\{a,c,d\}\in\tau_1$,
   Donc ; τ_1 est une topologie.
   ii) $\tau_2=\{\emptyset,E,\{a\},\{c,d\},\{b,c,d\}\}$:
   On a $\{a\}\cup\{c,d\}=\{a,c,d\}\notin\tau_1$. Donc ; τ_2 n'est pas une topologie.
   iii) $\tau_3=\{\emptyset,E,\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$:
   $*)$ $\emptyset,E\in\tau_3$,
   $**)$ $\forall\mathcal{O}\in\tau_3:\emptyset\cap\mathcal{O}=\emptyset\in\tau_3, E\cap\mathcal{O}=\mathcal{O}\in\tau_3$,
   $\{a\}\cap\{a,b\}=\{a\}\in\tau_3,\ \{a\}\cap\{a,b,c\}=\{a\}\in\tau_3, \{a,b\}\cap\{a,b,c\}=\{a,b\}\in\tau_3$
   $***)$ $\forall\mathcal{O}\in\tau_3:\emptyset\cup\mathcal{O}=\mathcal{O}\in\tau_3, E\cup\mathcal{O}=E\in\tau_3, \{a\}\cup\{a,b\}=\{a,b\}\in\tau_3$,
   $\{a\}\cup\{a,b,c\}=\{a,b,c\}\in\tau_3, \{a,b\}\cup\{a,b,c\}=\{a,b,c\}\in\tau_3$,
   Donc ; τ_3 est une topologie.
2. L'ensemble des fermés de la topolgie τ_1 est $\{\emptyset,E,\{b,c,d\},\{a,b\},\{a\}\}$.
   L'ensemble des fermés de la topolgie τ_3 est $\{\emptyset,E,\{b,c,d\},\{c,d\},\{d\}\}$.

Exercice 02 : $a\in\mathbb{R}, I_\alpha=]\alpha,+\infty[$, $\tau=\{\emptyset,\mathbb{R},I_\alpha(\alpha\in\mathbb{R})\}$.

1. Montrons que $(\mathbb{R},\tau)$ est un espace topologique :
   $*)$ $\emptyset,\mathbb{R}\in\tau$,
   $**)$ $\forall\mathcal{O}\in\tau:\emptyset\cap\mathcal{O}=\emptyset\in\tau, \mathbb{R}\cap\mathcal{O}=\mathcal{O}\in\tau$,
   Soit $\{I_{\alpha_i}\}_{1\le i\le n}\subset\tau$. On pose $\alpha=\max\limits_{1\le i\le n}\alpha_i$. On a : $\bigcap\limits_{i=1}^{n}I_{\alpha_i}=I_\alpha\in\tau$.
   $***)$ $\forall\mathcal{O}\in\tau:\emptyset\cup\mathcal{O}=\mathcal{O}\in\tau, \mathbb{R}\cup\mathcal{O}=\mathbb{R}\in\tau$,
   Soit $\{I_{\alpha_i}\}_{i\in I}\subset\tau$. On pose $\alpha=\min\limits_{i\in I}\alpha_i$.
   Si $\alpha=-\infty$ on a : $\bigcup\limits_{i\in I}I_{\alpha_i}=\mathbb{R}\in\tau$ Si $\alpha>-\infty$ on a : $\bigcup\limits_{i=1}^{n}I_{\alpha_i}=I_\alpha\in\tau$
   Donc : $(\mathbb{R},\tau)$ est un espace topologique.
2. On a : $\emptyset\in(\mathbb{R},|.|), \mathbb{R}\in(\mathbb{R},|.|)$, et pour $I_\alpha\in\tau$ est un intervalle, donc $I_\alpha\in(\mathbb{R},|.|)$.
   Donc : $\tau\subset(\mathbb{R},|.|)$. Alors ; τ est moins fine que la Topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

Exercice 03 : $E=\{a,b,c\}$, $\tau=\{\emptyset,E,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,c\}\}$.

1. Vérifions que τ est une Topologie :
   $*)$ $\emptyset,E\in\tau$,

$**)$ $\forall \mathcal{O} \in \tau : \emptyset \cap \mathcal{O} = \emptyset \in \tau, E \cap \mathcal{O} = \mathcal{O} \in \tau, \{a\} \cap \{b\} = \emptyset \in \tau, \{a\} \cap \{a,b\} = \{a\} \in \tau,$
$\{a\} \cap \{a,c\} = \{a\} \in \tau, \{b\} \cap \{a,b\} = \{b\} \in \tau, \{b\} \cap \{a,c\} = \emptyset \in \tau, \{a,b\} \cap \{a,c\} = \{a\} \in \tau$
$***)$ $\forall \mathcal{O} \in \tau : \emptyset \cup \mathcal{O} = \mathcal{O} \in \tau, E \cup \mathcal{O} = E \in \tau, \{a\} \cup \{b\} = \{a,b\} \in \tau, \{a\} \cup \{a,b\} = \{a,b\} \in \tau,$
$\{a\} \cup \{a,c\} = \{a,c\} \in \tau, \{b\} \cup \{a,b\} = \{a,b\} \in \tau, \{b\} \cup \{a,c\} = E \in \tau, \{a,b\} \cup \{a,c\} = E \in \tau$
Donc : τ est une topologie.

2. $C_E^{\{a\}} = \{b,c\} \notin \tau, C_E^{\{a,b\}} = \{c\} \notin \tau$. Donc : $\{a\}, \{a,b\}$ ne sont pas des fermés.

Exercice 04 : $\tau = \{\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}, \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}} \cup \mathbb{N}, \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}} \cup \mathbb{Z}, \mathbb{R}\}$, $D = \{3, \sqrt{3}\}$.

1. i) $\mathcal{V}(D) = \{V \subset \mathbb{R}; \exists \mathcal{O} \in \tau : D \subset \mathcal{O} \subset V\}$. Les ouverts qui contient D sont : $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}} \cup \mathbb{N}, \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}} \cup \mathbb{Z}, \mathbb{R}$,
mais on a : $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}} \cup \mathbb{N} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}} \cup \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Donc : $\mathcal{V}(D) = \{V \subset \mathbb{R} : \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}} \cup \mathbb{N} \subset V\}$.
ii) $D' = \{x \in D, \forall V \in \mathcal{V}(x); V \cap (D \setminus \{x\}) \neq \emptyset\}$.
* Si $x = 3$, on a $D \setminus \{x\} = \{\sqrt{3}\}$, et on a $\mathbb{N} \in \mathcal{V}(x)$ mais $\mathbb{N} \cap (D \setminus \{x\}) = \emptyset$. Donc : $3 \notin D'$.
* Si $x = \sqrt{3}$, on a $D \setminus \{x\} = \{3\}$, et on a $\mathbb{Q} \in \mathcal{V}(x)$ mais $\mathbb{Q} \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$. Donc : $\sqrt{3} \notin D'$.
* Si $x \in \mathbb{Q} \setminus \{3\}$, on a $D \setminus \{x\} = D$, et $\forall v \in \mathcal{V}(x); \cap(D \setminus \{x\}) = \{3\}$. Donc : $x \in D'$. * Si $x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{3}\})$, on a $D \setminus \{x\} = D$, et $\forall v \in \mathcal{V}(x); \cap(D \setminus \{x\}) = \{\sqrt{3}\}$. Donc : $x \in D'$.
Alors ; $D' = \mathbb{R} \setminus D$.
iii) $\overline{D} = D \cup D' = \mathbb{R}$, et $\overset{0}{D} = \emptyset$, donc : $\mathcal{F}r(D) = \overline{D} \setminus \overset{0}{D} = \mathbb{R}$, et $\mathcal{E}xt(D) = \emptyset$.

2. $\overline{D} = \mathbb{R}$. Donc : D est partout dense dans $\mathbb{R}$.
Conclusion : D est dénombrable et partout dense dans $\mathbb{R}$. Donc ; $(\mathbb{R}, \tau)$ est séparable.

3. $\tau_{\mathbb{Z}} = \{\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$ et $Gross_{\mathbb{Z}} = \{\emptyset, \mathbb{Z}\}$. Donc : la topologie $\tau_{\mathbb{Z}}$ est plus fine que $Gross_{\mathbb{Z}}$.

Exercice 05 : Déterminons l'intérieur et l'adhérence :

$A = \{-1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} : \overset{0}{A} = \emptyset$, $\overline{A} = A \cup \{-1\}$.
$B =]-1,1[\cup \{2\} \cup [3,4[: \overset{0}{B} =]-1,1[\cup]3,4[$, $\overline{B} = [-1,1] \cup \{2\} \cup [3,4]$.
$C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 4\} \cap [1,5[: C = [1,2]$, $\overset{0}{C} =]1,2[$, $\overline{C} = [1,2]$.
$D = \mathbb{Q} \cap [-1,1]$, $\overset{0}{D} = \emptyset$, $\overline{D} = [-1,1]$.

Exercice 06 : $\triangle = \{(x;x) : x \in E\}$

$\Longrightarrow$ Supposons que $\triangle$ est un fermé de E^2 , donc $\Omega = C_{E^2}^{\triangle}$ est un ouvert de E^2. soit $x, y \in E^2$ tels que $x \neq y$, alors $(x,y) \in \Omega$ et Ω est un voisinage de (x,y), $\exists V_x \in \mathbf{V}(x), \exists V_y \in \mathbf{V}(y) : V_x \times V_y \subset \Omega$, donc $V_x \cap V_y = \emptyset$.
$\Longleftarrow$ Soit $(x,y) \in \Omega$, on a $x \neq y$, alors $\exists V_x \in \mathbf{V}(x), \exists V_y \in \mathbf{V}(y) : \quad V_x \cap V_y = \emptyset$. Donc $V_x \times V_y \subset \Omega$. i.e. $\Omega \in \mathbf{V}(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Omega$, on déduit $\Omega = C_{E^2}^{\triangle}$ est un ouvert de E^2. i.e. $\triangle$ est fermé.

Exercice 07 :

$$\forall f, g \in E : d(f,g) = |f(0) - g(0)| + \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt$$

1. Montrons que d est une distance sur E :
   - Positive : $d \geq 0$ (évident).
     Soit $f, g \in E$.
     $$\begin{array}{rcl} d(f,g) = 0 & \Leftrightarrow & |f(0) - g(0)| = 0 \wedge \displaystyle\int_0^1 |f(t) - g(t)|dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |f(t) - g(t)| = 0, \forall t \in [0,1]. \\ & \Leftrightarrow & f(t) = g(t), \forall t \in [0,1]. \qquad\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \quad f \equiv g \end{array}$$
   - Symétrie : évident.
   - Inégalité triangulaire : Soit $f, g, h \in \mathbb{R}$. Alors;
     $$\begin{array}{rcl} d(f,h) & = & |f(0) - h(0)| + \displaystyle\int_0^1 |f(t) - h(t)|dt \\ & \leq & |f(0) - g(0)| + \displaystyle\int_0^1 |f(t) - g(t)|dt + |g(0) - h(0)| + \displaystyle\int_0^1 |g(t) - h(t)|dt \\ & = & d(f,g) + d(g,h) \end{array}$$

   Donc; d est une distance sur E.
2. Des éléments de la boule d'unité dans (E, d) : $x, x^2, \sqrt{x}, x^\alpha (\alpha \in \mathbb{Q}^+)$.

Exercice 08 :

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, f : \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$ telle que :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & : \quad x = -\infty \\ \dfrac{x}{1 + |x|} & : \quad x \in \mathbb{R} \\ 1 & : \quad x = +\infty \end{cases}$$

*) Montrons que $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ définit une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$: Il faut montrer que f est bijective.

- Positive : $d \geq 0$ (évident).
  Soit $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$.
  $$\begin{array}{rcl} d(x,y) = 0 & \Leftrightarrow & |f(x) - f(y)| = 0 \\ & \Leftrightarrow & f(x) = f(y) \\ & \Leftrightarrow & x = y \text{ (puisque } f \text{ est bijective)} \end{array}$$
- Symétrie : évident.
- Inégalité triangulaire : évident.

**) $B(0,1) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : d(0,x) < 1\} = \mathbb{R}$.
***) $\overline{B}(0,1) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : d(0,x) \leq 1\} = \overline{\mathbb{R}}$.

Exercice 09 :

$-U = \{-x : x \in U\} \qquad \lambda U = \{\lambda x : x \in U\} \ (\lambda \in \mathbb{R}^*) \qquad a + U = \{a + x : x \in U\} \ (a \in \mathbb{R})$

Montrer que :

1. $\Rightarrow$ Soit $x \in -U$. Donc : $-x \in U$. Alors, il existe $r > 0$ tel que $B(-x, r) =]-x-r, -x+r[\subset U$.
   Donc; $]x - r, x + r[\subset -U$, ie. $-U$ est ouvert.
   $\Leftarrow$ $-U$ ouvert $\Rightarrow U = -(-U)$ ouvert.

2. $\Rightarrow$ Supposons que $\lambda > 0$, et soit $x \in \lambda U$. Donc : $\dfrac{x}{\lambda} \in U$. Alors, il existe $r > 0$ tel que $]\dfrac{x}{\lambda} - r, \dfrac{x}{\lambda} + r[\subset U$.
   Donc ; $]x - \lambda r, x + \lambda r[\subset U$, ie. λU est ouvert.
   Pour $\lambda < 0$: U ouvert $\Rightarrow -\lambda U$ ouvert $\Rightarrow \lambda U$ ouvert.
   $\Leftarrow$ λU ouvert $\Rightarrow U = \dfrac{1}{\lambda}(\lambda U)$ ouvert.
3. $\Rightarrow$ Soit $x \in a+U$. Donc : $x-a \in U$. Alors, il existe $r > 0$ tel que $]x-a-r, x-a+r[\subset U$.
   Donc ; $]x - r, x + r[\subset a + U$, ie. $a + U$ est ouvert.
   $\Leftarrow$ $a + U$ ouvert $\Rightarrow U = -a + (a + U)$ ouvert.

Exercice 10 : Soient $x, y, z \in E$. On a

1. $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow \|x - y\| = 0 \Longleftrightarrow x - y = 0 \Longleftrightarrow x = y$,
2. $d(x, y) = \|x - y\| = |-1|\|y - x\| = d(y, x)$,
3. $d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$,

Donc : d est une distance sur E.