Corrigé d'Interrogation écrite

Solution d'exercice 01 :(03 **pts)**
$E = \{1, 2, 3\}$, $\tau = \{\emptyset, E, \{1\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$

1. Montrons que (E, τ) est un espace topologique
   $*)$ $\emptyset, E \in \tau$,
   $**)$ $\forall \mathcal{O} \in \tau : \emptyset \cap \mathcal{O} = \emptyset \in \tau, E \cap \mathcal{O} = \mathcal{O} \in \tau, \{1\} \cap \{3\} = \emptyset \in \tau, \{1\} \cap \{1, 2\} = \{1\} \in \tau$,
   $\{1\} \cap \{1, 3\} = \{1\} \in \tau, \{3\} \cap \{1, 2\} = \emptyset \in \tau, \{3\} \cap \{1, 3\} = \{3\} \in \tau, \{1, 2\} \cap \{1, 3\} = \{1\} \in \tau$
   $***)$ $\forall \mathcal{O} \in \tau : \emptyset \cup \mathcal{O} = \mathcal{O} \in \tau, E \cup \mathcal{O} = E \in \tau, \{1\} \cup \{c\} = \{1, 3\} \in \tau, \{1\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2\} \in \tau$,
   $\{1\} \cup \{1, 3\} = \{1, 3\} \in \tau, \{3\} \cup \{1, 2\} = E \in \tau, \{3\} \cup \{1, 3\} = \{1, 3\} \in \tau, \{1, 2\} \cup \{1, 3\} = E \in \tau$
   Donc τ est une topologie.
2. L'ensemble F de tous fermés de l'espace (E, τ) est $\{\emptyset, E, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$.
3. Comme $A = \{2, 3\}$,
   L'intérieur de A est $\overset{0}{A} = \{3\}$
   L'adhérence de A est $\overline{A} = A$ car A est fermé
   La trace de la topologie (E, τ) sur A est $\tau_A = \{\emptyset, A, \{2\}, \{3\}\}$.
4. $\sigma = \{\emptyset, E, \{1\}, \{2, 3\}\}$,
   Montrons que l'espace topologique (E, σ) n'est pas connexe
   On a $\{1\}$ est un ouvert et fermé dans (E, σ), mais $\{1\} \neq \emptyset$, $\{1\} \neq E$.
   Donc (E, σ) n'est pas connexe.
5. $\{2, 3\} \in \mathbf{V}_\sigma(2)$, alors que $\{2, 3\} \notin \mathbf{V}_\tau(2)$. Donc g n'est pas continue au point 2.

Solution d'exercice 02 :(02 **pts)**
$E = \mathbb{N}^*, \forall n, m \in E$:

$$d(m, n) = \begin{cases} 0 & : \quad m = n \\ 10 + \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} & : \quad m \neq n \end{cases}$$

1. Montrons que d est une distance sur E :
   i) Positive (évident).
   ii) Symétrie (évident).
   iii) Soient $n, m, p \in E$. On a : $d(n, p) = 10 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p} \leq 10 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} + 10 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p} = d(n, m) + d(n, p)$.

2. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans (E,d). Alors ;

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N} : n \geq m \geq n_0 \Rightarrow d(u_n, u_m) < \varepsilon$$

Supposons que $u_n \neq u_m$, Alors ; $d(u_n, u_m) = 10 + \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} < \varepsilon$, ce qui est impossible pour $\varepsilon = 1$ par exemple. Donc : $u_n = u_m, \forall n \geq n_0$.
Donc ; la suite (u_n) est stationnaire ; par conséquent elle est convergente. Donc : (E,d) est complet.

3. $f : E \to E, f(n) = n + 1$.
$n \neq m \Rightarrow f(n) \neq f(m) \Rightarrow d(f(n), f(m)) = 10 + \dfrac{1}{m+1} + \dfrac{1}{n+1} < 10 + \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = d(n,m)$
Si f est contractante, alors ; il admet un point fixe, i.e $\exists n \in \mathbb{N}^* : n = f(n) = n + 1$, ce qui est impossible.
Donc : f n'est pas contractante.

Solution d'exercice 03 :(03 **pts)**

Dans $(\mathbb{R}^2, d_2)$, considérons les ensembles suivants :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2\},\ B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\},$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

1. Reprisentation graphique des A, B, C, et D.
2. Etudions la compacité de A, B, et D
Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x,y) = x^2 + y^2$, $A = f^{-1}([1, +\infty[)$, $B = f^{-1}([0,4])$. f est continue, $[1, +\infty[$, $[0,4]$ sont des fermés dans $\mathbb{R}$.
Donc A, B sont des fermés.
A n'est pas borné, alors A n'est pas compact.
B est borné car $B \subset \overline{B}(0,2)$, alors B est compact.
On a $D = A \cap B$. Alors D est fermé.
D est borné car $D \subset \overline{B}(0,2)$, alors D est compact.
3. Etudions la connexité de C
Soit la fonction $f :]-\pi, +\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, définie par $\forall t \in]-\pi, +\pi] : f(t) = (\cos t, \sin t)$, on a $f(]-\pi, +\pi]) = C$. Comme f est continue sur $]-\pi, +\pi]$, et $]-\pi, \pi]$ est connexe.
Donc C est connexe.

Notre espoir est d'avoir réussi !

Enseignant Abdelaziz Hellal