Université Mohamed Boudiaf-M'sila *2 éme Année Licence Maths*
Département des Mathématiques-MI **Date :** *13-12-2023.* **Durée :** *01h30*
Module: Introduction à la Topologie

Interrogation écrite

Exercice 01 :(03 pts)

Soient $E = \{1, 2, 3\}$ et la famille $\tau = \{\emptyset, E, \{1\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$

1. Montrer que (E, τ) est un espace topologique ?
2. Donner l'ensemble F de tous fermés de l'espace (E, τ) ?
3. On pose $A = \{2, 3\}$
   Déterminer l'intérieur de A, l'adhérence de A, et τ_A la trace de la topologie (E, τ) sur A ?
4. Soit la famille $\sigma = \{\emptyset, E, \{1\}, \{2, 3\}\}$
   Montrer que l'espace topologique (E, σ) n'est pas connexe ?
5. Soit l'application $g : (E, \tau) \to (E, \sigma)$ définie par : $\forall x \in E : g(x) = x$,
   Etudier la continuité de l'application g au point $a = 2$?

Exercice 02 :(02 pts)

Soit $E = \mathbb{N}^*$. On pose pour tous $n, m \in E$:

$$d(m,n) = \begin{cases} 0 & : \quad m = n \\ 10 + \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} & : \quad m \neq n \end{cases}$$

1. Montrer que d est une distance sur E.
2. Montrer que (E, d) est complet.
3. Soit $f : E \to E$ avec $f(n) = n + 1$. Montrer que pour tous $n, m \in E (n \neq m)$ on a $d(f(n), f(m)) < d(n, m)$, mais f n'est pas contractante.

Exercice 03 :(03 pts)

Considérons l'espace métrique $(\mathbb{R}^2, d_2)$, et soit les quatre ensembles suivants :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2\},\ B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},\ D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

(a) Tracer dans un repère orthonormé A, B, C, et D ?

(b) Etudier la compacité de A, B, et D ?

(c) Etudier la connexité de C ?