Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté de Mathématiques et d'informatiques
Département de Mathématiques
Module: Introduction à la Topologie

L2 : *Semestre 03*
Série 02 : *Espaces compacts*
Année : *2023-2024*

Exercice 01 : Soit $I =]0,1[\subset \mathbb{R}$ muni de la distance usuelle $|.|$, et soit la famille $\{O_x\}_{x\in I}$, ou $O_x = \left]\frac{x}{2}, 2x\right[$.

1. Montrer que $\{O_x\}_{x\in I}$ réalise un recouvrement de I.
2. Montrer que I n'est pas compact.

Exercice 02 : [**Compacité d'Alexandrov**]: Soit Ω un espace localement compact, $\omega \notin \Omega$, et $X = \Omega \cup \{\omega\}$. On apelle ouvert de X soit un ouvert de Ω, soit une partie de la forme $\Gamma \cup \{\omega\}$, ou $\Gamma \subset \Omega$ est le complémentaire d'un compact de Ω. Montrer que :

1. On a défini une Topologie sur X.
2. Cette Topologie induite sur Ω le Topologie initiale de Ω.
3. X est séparé.
4. X est compact.

Application : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ la droite réelle achevée.

Exercice 03 : Lesquels des sous-ensembles suivants sont compacts ?

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
2. $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 1\}$
3. $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y > 1\}$

Exercice 04 : Soit X un espace topologique discret. A quelle condition l'espace X est connexe ?

Exercice 05 : Etudier la connexité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Exercice 06 :

1. Montrer que $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$
2. Etudier la connexit l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x.y > 1\}$.