Exercice 01 :

$I =]0,1[\subset (\mathbb{R}, |.|) . O_x = \left]\frac{x}{2}, 2x\right[, x \in I.$

1. Montrons que $\{O_x\}_{x\in I}$ réalise un recouvrement de I :
   Soit $y \in I$. Donc ; $y \in O_y \subset \bigcup_{x\in I} O_x$. Alors ; $\{O_x\}_{x\in I}$ réalise un recouvrement de I.
2. Montrons que I n'est pas compacte :
   Supposons que I est compact. Alors ; il existe une famille $\{O_{x_i}\}_{i=1}^n$, telle que $I \subset \bigcup_{i=1}^n O_{x_i}$.
   Soit i_0, tel que $x_{i_0} = \min_{1\leq i\leq n}\{x_i\}$. Donc : $\forall x \in \left]0, \frac{x_{i_0}}{2}\right[: x \notin O_{x_i} \Rightarrow x \notin \bigcup_{i=1}^n O_{x_i}$
   ce qui contredit $I \subset \bigcup_{i=1}^n O_{x_i}$. Donc : I n'est pas compact.

Exercice 02 :

Soit Ω localement compact, $\omega \notin \Omega, X = \Omega \cup \{\omega\}$. $\mathcal{O}$ ouvert de $X \Leftrightarrow \mathcal{O}$ ouvert de Ω, ou une partie de la forme $\Gamma \cup \{\omega\}$, o $\Gamma = C_\Omega^K$ (K compact de Ω). Montrons que :

1. On a défini une Topologie sur X :
   i) $\emptyset, X$ sont des ouverts paor définition.
   ii) Soit $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille des ouverts de X tels que $\mathcal{O}_i \in \{U_j\}_{j\in J} \cup \left(C_\Omega^{K_l} \cup \{\omega\}\right)_{l\in L}$.
   K_l compact $\Rightarrow K_l$ fermé $\Rightarrow C_\Omega^{K_l}$ ouvert. Donc : $\bigcup_{l\in L} C_\Omega^{K_l} = \mathcal{O}$ ouvert, et on a : $\bigcup_{j\in J} U_j = U$ ouvert.
   Donc : $\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i = U \cup \mathcal{O} \cup \{\omega\}$. o $U \cup \mathcal{O}$ ouvert. Alors : $\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$ ouvert.
   iii) Soit $(\mathcal{O}_i)_{i=1}^n$ une famille des ouverts de X. Comme précédent, on trouve que $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{O}_i$ ouvert.
2. Soit τ_Ω la topologie induite de la topologie de X sur Ω.
   U ouvert de τ_Ω si et seulement si $U = \mathcal{O} \cap \Omega$. o $\mathcal{O}$ est un ouvert de X.
   Si $\mathcal{O}$ est un ouvert de Ω, alors U est un ouvert de Ω.
   Si $\mathcal{O}$ est de la forme $C_\Omega^K \cup \{\omega\}$, alors ; $U = (C_\Omega^K \cup \{\omega\}) \cap \Omega = C_\Omega^K$, ouvert de Ω.
   Donc : cette Topologie induite sur Ω est le Topologie initiale de Ω.
3. Soit $x, y \in X$ tels que $x \neq y$.
   *) Si $x, y \in \Omega$, il existe $V_x \in \mathcal{V}(x), V_y \in \mathcal{V}(y)$ tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$ (puisque Ω est localement compact, donc ; séparé).
   *) Si $x \in \Omega, y = \omega$. On a : Ω est localement compact $\Rightarrow \exists K \in \mathcal{V}(x); K$ compact.
   $\Gamma = C_\Omega^K$ ouvert de Ω, et $\Gamma \cup \{\omega\} \in \mathcal{V}(y)$.

On a : $(\Gamma \cup \{\omega\}) \cap K_0 = \emptyset$.
Donc : X est srSoit $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un recouvrement ouvert de X. Cette recouvrement admet au moins $\Omega_{\lambda_0} = \Gamma_{\lambda_0} \cup \{\omega\}$.
$\Gamma_{\lambda_0} = C_\Omega^{K_{\lambda_0}}$, o K_{λ_0} est compact de Ω.
On a : $K_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda\neq\lambda_0} \Omega_\lambda$, on peut extraire un recouvrement fini $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda=1}^{n}(\lambda \neq \lambda_0)$.
Donc ; $X \subset \bigcup_{\lambda=1,\lambda\neq\lambda_0}^{n} \Omega_\lambda \cup \Omega_{\lambda_0}$, recouvrement fini de X. Donc : X est compact.

Application : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$. On pose $\omega_1 = -\infty, \omega_2 = +\infty$, et $\mathbb{R}$ localement compact.

Exercice 03 :

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
   Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + y^2$.
   $A = f^{-1}([0, 1]) \Rightarrow A$ est fermé, $A \subset \overline{B}((0, 0), 1) \Rightarrow A$ est borné. Donc : A est cmpact.
2. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 1\}$
   Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x$.
   $A = f^{-1}(1) \Rightarrow A$ est fermé, $A \subset \overline{B}((1, 0, 0), \sqrt{2}) \Rightarrow A$ est borné. Donc : A est cmpact.
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y > 1\}$
   C n'est pas borné, donc : n'est pas compact.

Exercice 04 :
i) Supposons qua $Card(X) = 1$. Alors ; $X = \{x\}$. La toplogie discrète est $\{\emptyset, X\}$. Il est clair que cet espace est connexe.
ii) Supposons qua $Card(X) \geq 2$. Donc : il exise $x, y \in X$ tels que $x \neq y$. L'ensemble $\{x\}$ est ouvert et fermé au meme temps, $\{x\} \neq \emptyset, \{x\} \neq X$. Donc : cet espace n'est pas connexe.
Alors ; X est connexe si et seulement s'il est un sengleton ($card(X) = 1$).
Exercice 05 :
i) $\mathbb{Q} \subset]-\infty, \sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[,\ ]-\infty, \sqrt{2}[,]\sqrt{2}, +\infty[$ deux ouverts, et $\mathbb{Q} \subsetneq]-\infty, \sqrt{2}[, \mathbb{Q} \subsetneq]\sqrt{2}, +\infty[$.
Donc : $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe.
ii) $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \subset]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[,]-\infty, 0[,]0, +\infty[$ deux ouverts, et $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \subsetneq]-\infty, 0[, (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \subsetneq]0, +\infty[$.
Donc : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas connexe.