Exercice 01 :

$X = \{a, b, c, d\}$ muni de la topologie $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ muni de la topologie $\sigma = \{\emptyset, Y, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$, et $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ définie par : $f(a) = f(b) = 1, f(c) = 2, f(d) = 4$.

1. $\mathcal{V}(a) = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X\}$.
   $\mathcal{V}(b) = \{\{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, X\}$.
   $\mathcal{V}(c) = \{\{b, c, d\}, X\}$.
   $\mathcal{V}(d) = \{\{b, c, d\}, X\}$.
2. $\mathcal{V}(1) = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 1\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, Y\}$.
   $\mathcal{V}(2) = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, Y\}$.
   $\mathcal{V}(3) = \{\{1, 2, 3\}, Y\}$.
   $\mathcal{V}(d) = \{Y\}$.
3. $f^{-1}(\mathcal{V}(1)) = \{\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X\}$.
   $f^{-1}(\mathcal{V}(2)) = \{\{a, b, c\}, X\}$.
   $f^{-1}(\mathcal{V}(4)) = \{X\}$.
4. La continuité :
   *) $f(a) = 1, f^{-1}(\mathcal{V}(1)) \subset \mathcal{V}(a) \Rightarrow f$ est continue au point a.
   *) $f(b) = 1, f^{-1}(\mathcal{V}(1)) \subset \mathcal{V}(b) \Rightarrow f$ est continue au point b.
   *) $f(c) = 2, f^{-1}(\mathcal{V}(2)) \subsetneq \mathcal{V}(c) \Rightarrow f$ n'est pas continue au point c.
   *) $f(d) = 4, f^{-1}(\mathcal{V}(4)) \subset \mathcal{V}(d) \Rightarrow f$ est continue au point d.

Exercice 02 :

$\chi_A : (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|)$:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & si \quad x \in A \\ 0, & si \quad x \notin A \end{cases}$$

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $(\mathbb{R}, |.|)$. On a les cas suivantes :
i) $0, 1 \in \mathcal{O} \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{O}) = X$.
ii) $0 \notin \mathcal{O}$ et $1 \in \mathcal{O} \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{O}) = A$.
iii) $0 \in \mathcal{O}$ et $1 \notin \mathcal{O} \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{O}) = C_X^A$.
Donc : La condition nécessaire et suffisante pour que l'application indicatrice χ_A soit continue, est que l'ensemble A est ouvert et fermé au meme temps.

Exercice 03 :

Soient $f, g \in E$. On a :

1. $|H(f) - H(g)| = |\int_0^1 (|f(x)| - |g(x)|)dx| \leq \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx = d_1(f, g)$
   Donc; H est Lipshitzienne de (E, d_1) vers $(\mathbb{R}, |.|)$.

2. $|H(f)-H(g)| \leq \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)| \int_0^1 dx = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)| = d_\infty(f,g)$

   Donc; H est Lipshitzienne de (E, d_∞) vers $(\mathbb{R}, |.|)$.
3. On a : $x, 1 \in E$, et $H(x) = H(1)$. Donc : L'application H n'est pas bijective.

Exercice 04 :

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 = 0\} = f^{-1}(0)$. o $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = y - x^2$
   $\{0\}$ est fermt f est continue. Donc; B est fermé.
2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 \leq 0\} = f^{-1}(]-\infty, 0])$ o $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = y - x^2$
   $]-\infty, 0]$ est fermé, et f est continue. Donc; B est fermé.
3. $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq x^2 - y^2 + 5\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 - x^2 + z \leq 5\} = f^{-1}(]-\infty, 5])$. o $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = y^2 - x^2 + z$
   $]-\infty, 5]$ est fermé, et f est continue. Donc; C est fermé.

Exercice 05 :

1. $f : [a;b] \longrightarrow [c;d]; f(x) = \dfrac{d-c}{b-a}x + \dfrac{bc-ad}{b-a}$.
2. $f :]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$.
3. $f : \mathbb{R} \longrightarrow C(0,1); f(x) = \left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}, \dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.
4. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S(0,1); f(x,y) = \left(\dfrac{(1-x^2)(1-y^2)}{(1+x^2)(1+y^2)}, \dfrac{2y(1-x^2)}{(1+x^2)(1+y^2)}, \dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

Exercice 06 :

$d : \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^* \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que : $d(p,q) = \begin{cases} 0 & : \ p = q \\ \dfrac{1}{|p|} + \dfrac{1}{|q|} & : \ p \neq q \end{cases}$

1. Vérifions que d est une distance sur $\mathbb{Q}^*$:
   i) Positive (évident).
   ii) Symétrie (évident).
   iii) Soient $p, q, r \in \mathbb{Q}^*$. On a : $d(p,r) = \dfrac{1}{|p|} + \dfrac{1}{|r|} \leq \dfrac{1}{|p|} + \dfrac{1}{|q|} + \dfrac{1}{|q|} + \dfrac{1}{|r|} = d(p,q) + d(q,r)$.
2. i) Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n < m$.
   On a : $d(x_n, x_m) = n + m > 1$. Donc; la suite (x_n) est n'est pas de Cauchy.
   On a : $d(y_n, y_m) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} \leq \dfrac{1}{2n} < \varepsilon$, pour $m \geq n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Donc; la suite (y_n) est de Cauchy.

3. Supposons que $(\mathbb{Q}^*, d)$ est complet. Donc ; (y_n) de Cauchy $\Rightarrow$ (y_n) converge $\Rightarrow \exists \ell \in \mathbb{Q}^* : y_n \longrightarrow \ell$.
   Donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 ; d(y_n, \ell) < \varepsilon$.
   Alors ; $\dfrac{1}{|y_n|} + \dfrac{1}{|\ell|} < \varepsilon \Rightarrow \dfrac{1}{|\ell|} < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$.
   Donc ; $\dfrac{1}{|\ell|} = 0$, ce qui est impossible.
   Donc : $(\mathbb{Q}^*, d)$ n'est pas complet.

Exercice 07 :

$E = \mathbb{N}^*, \forall n, m \in E$:

$$d(m,n) = \begin{cases} 0 & : \ m = n \\ 10 + \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} & : \ m \neq n \end{cases}$$

1. Montrons que d est une distance sur E :
   i) Positive (évident).
   ii) Symie (évident).
   iii) Soient $n, m, p \in E$. On a : $d(n,p) = 10 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p} \leq 10 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} + 10 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p} = d(n,m) + d(n,p)$.
2. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans (E,d). Alors ;

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N} : n \geq m \geq n_0 \Rightarrow d(u_n, u_m) < \varepsilon$$

   Supposons que $u_n \neq u_m$, Alors ; $d(u_n, u_m) = 10 + \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} < \varepsilon$, ce qui est impossible pour $\varepsilon = 1$ par exemple. Donc : $u_n = u_m, \forall n \geq n_0$.
   Donc ; la suite (u_n) est stationnaire ; par conséquent elle est convergente. Donc : (E,d) est complet.
3. $f : E \to E, f(n) = n + 1$.
   $n \neq m \Rightarrow f(n) \neq f(m) \Rightarrow d(f(n), f(m)) = 10 + \dfrac{1}{m+1} + \dfrac{1}{n+1} < 10 + \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = d(n,m)$
   Si f est contractante, alors ; ila admet un point fixe, i.e $\exists n \in \mathbb{N}^* : n = f(n) = n + 1$, ce qui est impossible.
   Donc : f n'est pas contractante.