Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté de Mathématiques et d'inf.
Département de Mathématiques
Module: Introduction à la Topologie

L2 : *Semestre 03*
Série 05 : *Espaces Vectoriels Normés*
Année : *2022-2023*

Exercice 01 :
Soit l'application $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $N(x,y) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |x+ty|$.

1. Montrer que l'application N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner la sphère unité.

Exercice 02 :
Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur a valeurs dans $\mathbb{R}$. On munit E de $\|.\|_\infty$. D est la partie de E constituée des applications dérivables et P est la partie de E constituée des fonctions polynomiales.

Déterminer l'intérieur de D et l'intérieur de P.

Exercice 03 :
Soit E l'espace des applications continues sur $[0,1]$ a valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme $\|.\|_\infty$, on considère $A = \left\{ f \in E : f(0) = 0 \ \wedge \int_0^1 f(t)dt \geq 1 \right\}$.

Calculer $d(0,A)$.

Exercice 04 :
Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni de la norme : $\sum a_k X^k = \max(|a_k|, k \in N)$.

On note $P_n = 1 + X + \dfrac{X^2}{2} + \ldots + \dfrac{X^n}{n}$.

Montrer que la suite (P_n) est de Cauchy, mais ne converge pas.

Exercice 05 :
Soit $E = \mathbb{R}[x]$ muni de la norme : $\| \sum\limits_i a_i x^i \| = \sum\limits_i |a_i|$

1. Est-ce que $\varphi : P \mapsto P(x+1)$ est continue ?
2. Est-ce que $\psi : P \mapsto AP$ est continue ? ($A \in E$ fixé).

Exercice 06 :
Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme : $\|f\| = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx$.

1. Vérifier que $\|.\|$ est norme sue E.
2. Soit la fonction $T : E \to E$, définie par :
$$\forall f \in E : T_f(x) = T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt, \forall x \in [0,1]$$
Montrer que T est continue.
3. Soit $|||T|||$, norme de T dans $\mathcal{L}(E,E)$.
   i) Montrer que $|||T||| \leq 1$.
   ii) On dnit la suite des fonctions f_n par : $f_n(x) = (1-x)^n, \forall x \in [0,1]$. Déterminer $\|Tf_n\|$.

iii) Endéduire que $|||T||| = 1$.

Exercice 07 :

Soit E un e.v.n. On appelle hyperplan H de E le noyau d'une forme linéaire non nulle f. On dit que $f(x) = 0$ est "l'équation" de H.

Soit le théorème suivant :

H est un hyperplan de E si, et seulement si, H est un sous espace vectoriel propre de E tel que si F est un sous-espace vectoriel de E vérifiant $H \subset F$ alors $F = H$ ou $F = E$.

Montrer que H est fermé ou partout dense dans E.