Université Mohamed Boudiaf-M'sila **L2-S03 :** *Espaces Vectoriels Normés*
Faculté de Mathématiques et d'inf. *Solutions de la série 05*
Département de Mathématiques **Année :** *2023-2024*
Module: Introduction à la Topologie

Exercice 01 :

$N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, N(x,y) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |x+ty|$.

1. Montrons que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$:
   i) $N(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sup\limits_{t\in[0,1]} |x+ty| = 0 \Leftrightarrow x+ty = 0, \forall t \in [0,1] \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$
   ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a : $N(\lambda(x,y)) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |\lambda(x+ty)| = \lambda \sup\limits_{t\in[0,1]} |x+ty| = \lambda N(x,y)$.
   iii) Soit $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$. On a :
   $N((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |x_1+ty_1+x_2+ty_2| \leq \sup\limits_{t\in[0,1]} |x_1+ty_1| + \sup\limits_{t\in[0,1]} |x_2+ty_2| = N(x_1,y_1)+N(x_2,y_2)$.
2. La sphère unité : $S(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : N(x,y) = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sup\limits_{t\in[0,1]} |x+ty| = 1\}$.
   On a les cas suivantes :
   *) $x \geq 0, y \geq 0$: $\sup\limits_{t\in[0,1]} |x+ty| = x+y$.
   *) $x \leq 0, y \leq 0$: $\sup\limits_{t\in[0,1]} |x+ty| = -x-y$.
   *) $x \geq 0, y \leq 0$: $|x+ty| = \begin{cases} x+ty & : t \leq -\dfrac{x}{y} \\ -x-ty & : t \geq -\dfrac{x}{y} \end{cases}$ Donc :
   $\sup\limits_{t\in[0,1]} |x+ty| = \max\left(\sup\limits_{t\in[0,-\frac{x}{y}]}(x+ty), \sup\limits_{t\in[-\frac{x}{y},1]}(-x-ty)\right) = \max(x,-x-y) = \begin{cases} x & : 2x+y \\ -x-y & : 2x+y \end{cases}$
   *) $x \leq 0, y \geq 0$: $|x+ty| = \begin{cases} x+ty & : t \geq -\dfrac{x}{y} \\ -x-ty & : t \leq -\dfrac{x}{y} \end{cases}$ Donc :
   $\sup\limits_{t\in[0,1]} |x+ty| = \max\left(\sup\limits_{t\in[0,-\frac{x}{y}]}(-x-ty), \sup\limits_{t\in[-\frac{x}{y},1]}(x+ty)\right) = \max(-x,x+y) = \begin{cases} -x & : 2x+y \leq \\ x+y & : 2x+y \geq \end{cases}$
   On trouve : $S(0,1) = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6$, o :
   $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y = 1$.
   $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \leq 0, x+y = -1$.
   $S_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq 0, 2x+y \geq 0, x = 1$.
   $S_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 2x+y \leq 0, x+y = -1$.
   $S_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \geq 0, 2x+y \geq 0, x+y = 1$.
   $S_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \geq 0, 2x+y \leq 0, x = -1$.

Exercice 02 :

$E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\ \|f\|_\infty=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|,\ D=\{f\in E: f \text{ dérivable}\}, P=E\cap\mathbb{R}[X]$.

i) L'intérieur de D : Soit $f\in D, r>0$. Pour $g=f+\frac{|2x-1|}{2}r$ on a : $\|g-f\|_\infty=\sup\limits_{x\in[0,1]}\frac{|2x-1|}{2}r=\frac{r}{2}<r$

Donc ; $g\in B(f,r)$, et $g\notin D$. Alors ; $\overset{0}{D}=\emptyset$.

ii) L'intérieur de P : Soit $f\in P, r>0$. Pour $g=f+\frac{r}{2}e^{x-1}$ on a : $\|g-f\|_\infty=\sup\limits_{x\in[0,1]}\frac{r}{2}e^{x-1}=\frac{r}{2}<r$

Donc ; $g\in B(f,r)$, et $g\notin P$. Alors ; $\overset{0}{P}=\emptyset$.

Exercice 03 :

$E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\ \|f\|_\infty=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|,\ A=\left\{f\in E: f(0)=0\ \wedge\ \int_0^1 f(t)dt\geq 1\right\}$.

$d(0,A)=\inf\limits_{f\in A}\|f\|_\infty=\inf(\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|:\int_0^1 f(t)dt\geq 1, f(0)=0$.

On a : $\int_0^1 f(t)dt\geq 1\Rightarrow f\geq 1\Rightarrow \sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|\geq 1\Rightarrow d(0,A)\geq 1$.

Posons : $f_n(x)=\begin{cases}\frac{2n^2}{2n-1}x & : \ x\in\left[0,\frac{1}{n}\right[\\ \frac{2n}{2n-1} & : \ x\in\left]\frac{1}{n}0,1\right]\end{cases}$

On a : $f_n\in A$ et

$\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{2n^2}{2n-1}xdx+\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{2n}{2n-1}dx=1+\frac{n-1}{2n-1}\geq 1$

$\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)|=\frac{2n}{2n-1}\Rightarrow\|f_n\|_\infty=1$. On a : $\inf\|f_n\|_\infty=1$. Donc : $d(0,A)=1$.

Exercice 04 :

$E=\mathbb{R}[X],\ P=\sum a_kx^k,\ \|P\|=\max(|a_k|,k\in N), P_n=1+X+\frac{X^2}{2}+\ldots+\frac{X^n}{n}$.

i) Soit $\varepsilon>0$, et soit $n,m\in\mathbb{N}$ tels que $n>m$. On a : $\|P_n-P_m\|=\|\sum\limits_{k=m+1}^{n}\frac{x^k}{k}\|=\frac{1}{m+1}$.

Pour $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, on trouve $\frac{1}{m+1}<\varepsilon\Rightarrow\|P_n-P_m\|<\varepsilon$.

Donc : (P_n) est une suite de Cauchy.

ii) Supposons qu'il existe $P=\in E$ tel que $P_n\longrightarrow P$. On pose $P=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_kx^k$.

Pour $n\geq k$:

$$\begin{aligned}\|P_n-P\| &= \|(a_0-1)+(a_1-1)x+\ldots+\left(a_k-\frac{1}{k}\right)x^k+\frac{x^{k+1}}{k+1}+\ldots+\frac{x^n}{n}\|\\ &= \max\left(|a_0-1|,|a_1-1|,\ldots,\left|a_k-\frac{1}{k}\right|,\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\\ &= \max A_n\end{aligned}$$

$\max A_n = \max\left(|a_0-1|, |a_1-1|, \ldots, \left|a_k - \frac{1}{k}\right| \ldots + \frac{1}{n_0}\right)$ si $n_0 \geq k$.
$\max A_n = \max\left(|a_0-1|, |a_1-1|, \ldots, \left|a_k - \frac{1}{n_0}\right|\right)$ si $n_0 \leq k$.
On pose $\varepsilon_0 = \dfrac{\max A_n}{2}$. Donc : $\|P_n - P\| \geq \varepsilon_0$, ce qui est une contradiction.
Alors : (P_n) n'est pas convergente.

Exercice 05 :

$E = \mathbb{R}[x]$, $\|\sum_i a_i x^i\| = \sum_i |a_i|$

1. La continuité de $\varphi : P \mapsto P(x+1)$:
   Soit $(P_n) \subset \mathbb{E}$ tel que $P_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$. pour $\varepsilon > 0$, et $n \geq n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ on trouve $\|P_n\| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$.
   Donc : $P_n \longrightarrow 0$, mais :
   $$\|\varphi(P_n) - \varphi(0)\| = \left\|\frac{(x+1)^n}{n}\right\| = \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right\| = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} = 1.$$
   Donc : pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, on a : $\|\varphi(P_n) - \varphi(0)\| > \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
   Donc, la suite $(\varphi(P_n))$ ne converge pas vers $\varphi(0)$. Alors : φ n'est pas continue.
2. La continuité de $\psi : P \mapsto AP\,(A \in E$ fixé$)$:
   On pose $A = A = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} A_j x^j$, k fixé, et $P = \sum_{i=0}^{n} a_n x^k$. On a :
   $$\begin{aligned} \|\psi(P)\| &= AP &= \left\|\left(\sum_{j=0}^{k} A_j x^j\right)\left(\sum_{i=0}^{n} a_n x^k\right)\right\| \\ &\leq \left\|\sum_{j=0}^{k} A_j x^j\right\| . \left\|\sum_{i=0}^{n} a_n x^k\right\| &= \|A\|.\|P\| \end{aligned}$$
   Donc : ψ est continue.

Exercice 06 :

$E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $\|f\| = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx$.

1. Vérifions que $\|.\|$ est norme sue E : Soit $f, g \in E, \lambda \in \mathbb{R}$.
   *) $\|f\| \geq 0$ et $\|f\| = 0 \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$.
   **) $\|\lambda f\| = \displaystyle\int_0^1 |\lambda f(x)|dx = |\lambda| \int_0^1 |f(x)|dx = |\lambda|\|f\|$.
   ***) $\|f+g\| = \displaystyle\int_0^1 |f(x)+g(x)|dx \leq |\int_0^1 (|f(x)|+|g(x)|)dx = \int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 |g(x)|dx = \|f\| + \|g\|$.
2. $T : E \to E$, $T_f(x) = T(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt, \forall x \in [0,1]$. Montrons que T est continue :

$$\begin{aligned}
\|T(f)\| &= \int_0^1 |T(f(x))|dx &&= \int_0^1 |\int_0^x f(t)dt|dx \\
&\leq \int_0^1 \int_0^x |f(t)dt|dx &&\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(t)dt|dx \\
&= \int_0^1 \|f\|dx &&= \|f\|
\end{aligned}$$

Donc : T est continue.

3. Soit $|||T|||$, norme de T dans $\mathcal{L}(E,E)$.

   i) On a : $\|Tf\| \leq \|f\| \Rightarrow |||T||| = \sup_{\|f\|\neq 0} \dfrac{\|Tf\|}{\|f\|} \leq 1 \ldots (1)$

   ii) $\|f_n\| = \displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|dx = \int_0^1 (1-x)^n = \frac{1}{n+1}$

   $Tf_n(x) = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 (1-t)^n = \frac{1-(1-x)^{n+1}}{n+1}$

   $\|Tf_n\| = \displaystyle\int_0^1 |Tf_n(x)|dx = \int_0^1 \frac{1-(1-x)^{n+1}}{n+1}dx = \frac{1}{n+2}.$

   iii) On a : $\dfrac{\|Tf_n\|}{\|f_n\|} = \dfrac{n+1}{n+2} \Rightarrow |||T||| = \sup_{\|f\neq 0\|} \dfrac{\|Tf\|}{\|f\|} \to 1$. Donc : $|||T||| \geq 1 \ldots (2)$.

   De (1) et (2) on trouve $|||T||| = 1$.

Exercice 07 :

H hyperplan, donc : pour tout F s.e.v de E : $H \subset F \Rightarrow F = H$ où $F = E$.
H s.e.v de $E \Rightarrow \overline{H}$ s.e.v de E tel que $H \subset \overline{H}$.
Donc : $\overline{H} = H$ (i.e H fermé), où $\overline{H} = E$ (i.e H partout dense dans E).