Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Département des Mathématiques-MI
Module: Introduction à la Topologie

2 éme Année *Licence Maths*
Semestre : *1*
Année : *2022-2023*

Corrigé de l'examen final

Solution d'exercice 01 :(05 pts) $E = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, E, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$

1. Montrons que (E, τ) est un espace topologique.................................(01 pts)
   $*)$ $\emptyset, E \in \tau$,
   $**)$ $\forall \mathcal{O} \in \tau : \emptyset \cap \mathcal{O} = \emptyset \in \tau, E \cap \mathcal{O} = \mathcal{O} \in \tau, \{a\} \cap \{c\} = \emptyset \in \tau, \{a\} \cap \{a, b\} = \{a\} \in \tau$,
   $\{a\} \cap \{a, c\} = \{a\} \in \tau, \{c\} \cap \{a, b\} = \emptyset \in \tau, \{c\} \cap \{a, c\} = \{c\} \in \tau, \{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\} \in \tau$
   $***)$ $\forall \mathcal{O} \in \tau : \emptyset \cup \mathcal{O} = \mathcal{O} \in \tau, E \cup \mathcal{O} = E \in \tau, \{a\} \cup \{c\} = \{a, c\} \in \tau, \{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\} \in \tau$,
   $\{a\} \cup \{a, c\} = \{a, c\} \in \tau, \{c\} \cup \{a, b\} = E \in \tau, \{c\} \cup \{a, c\} = \{a, c\} \in \tau, \{a, b\} \cup \{a, c\} = E \in \tau$
   Donc τ est une topologie.
2. L'ensemble F de tous fermés de l'espace (E, τ) est $\{\emptyset, E, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$................(01 pts)
3. Comme $D = \{b, c\}$,
   L'intérieur de D est $\overset{0}{D} = \{c\}$ ....(0, 5 pts)
   L'adhérence de D est $\overline{D} = D$ car D est fermé ....(0, 5 pts)
   La trace de la topologie (E, τ) sur D est $\tau_D = \{\emptyset, D, \{b\}, \{c\}\}$..................................(0, 5 pts)
4. $\sigma = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b, c\}\}$,
   Montrons que l'espace topologique (E, σ) n'est pas connexe
   On a $\{a\}$ est un ouvert et fermé dans (E, σ), mais $\{a\} \neq \emptyset$, $\{a\} \neq E$.
   Donc (E, σ) n'est pas connexe..................(0, 5 pts)
5. $\{b, c\} \in \mathbf{V}_\sigma(b)$, alors que $\{b, c\} \notin \mathbf{V}_\tau(b)$. Donc f n'est pas continue au point b.................(01 pts)

Solution d'exercice 02 :(05 pts)

$$d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ d(n, m) = \begin{cases} 0 & si \quad n = m \\ 1 + \dfrac{1}{n + m} & si \quad n \neq m \end{cases}$$

1. Vérifions que d est une distance sur $\mathbb{N}$ ....(01 pts)
   i) Positive : $\forall n, m \in E;\ d(n, m) \geq 0,\ d(n, m) = 0 \Leftrightarrow n = m$.
   ii) Symétrie : $\forall n, m \in E;\ d(n, m) = d(m, n)$.
   iii) Soient $n, m, p \in E$. On a : $d(n, p) = 1 + \dfrac{1}{n + p} \leq 1 + \dfrac{1}{n + m} + 1 + \dfrac{1}{m + p} = d(n, m) + d(m, p)$.
2. La boule ouverte. On a $B(0, r) = \{0\} \cup G$, avec $G = \{n \in \mathbb{N}^\star : d(0, n) < 1\}$..................(0, 5 pts)
   On a $d(0, n) < r \Longleftrightarrow 1 + \frac{1}{n} < r \Longleftrightarrow \frac{1}{n} < r - 1$..................(0, 5 pts)
   Si $r \leq 1$ alors $G = \emptyset$. Donc $B(0, r) = \{0\}$. ....(0, 5 pts).
   Si $r > 1$ alors $G = \{n_0 + 1, n_0 + 2, ...\}$, avec $n_0 = \left[\frac{1}{r-1}\right]$.
   Donc $B(0, r) = \{0, n_0 + 1, n_0 + 2, ...\}$........................(0, 5 pts).

3. Soit (u_n) une suite de Cauchy n'est pas stationnaire, et soit $\varepsilon > 0$, pour un sertain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, et pour $n, m > n_0$ on a $d(u_n, u_m) < \varepsilon$. Ce qui donne $1 + \frac{1}{u_n+u_m} < \varepsilon$.
   Si on prend $\varepsilon < 1$ on trouve $1 + \frac{1}{u_n+u_m} < 0$, contradiction. ....$(0,5$ pts$)$
   Donc (u_n) est stationnaire...................$(0,5$ pts$)$
4. Toute suite de Cauchy est stationnaire, alors convergente...................$(0,5$ pts$)$
   Donc $(\mathbb{N}, d)$ est complet...................$(0,5$ pts$)$

Solution d'exercice 03 :(05 pts)
Dans $(\mathbb{R}^2, d_2)$, considérons les ensembles suivants :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2\},\ B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\},$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$$

1. Reprisentation graphique des A, B, C, et D...................$(01$ pts$)$
2. Etudions la compacité de A, B, et D
   Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x,y) = x^2 + y^2$, $A = f^{-1}([1, +\infty[)$, $B = f^{-1}([0,2])$. f est continue, $[1, +\infty[$, $[0,2]$ sont des fermés dans $\mathbb{R}$.
   Donc A, B sont des fermés. ....$(0,5$ pts$+0,5$ pts$)$
   A n'est pas borné, alors A n'est pas compact. ....$(0,5$ pts$)$
   B est borné car $B \subset \overline{B}(0, \sqrt{2})$, alors B est compact. ....$(0,5$ pts$)$
   On a $D = A \cap B$. Alors D est fermé...$(0,5$ pts$)$
   D est borné car $D \subset \overline{B}(0, \sqrt{2})$, alors D est compact................................$(0,5$ pts$)$
3. Etudions la connexité de C
   Soit la fonction $f :]-\pi, +\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, définie par $\forall t \in]-\pi, +\pi] : f(t) = (\cos t, \sin t)$, on a $f(]-\pi, +\pi]) = C$. Comme f est continue sur $]-\pi, +\pi]$, et $]-\pi, \pi]$ est connexe.
   Donc C est connexe......................................$(01$ pts$)$

Exercice 04 :(05 pts)
Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

1. $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach. ....$(0,5$ pts$)$
   Justification :
   On dit qu'un e.v.n $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach si l'espace métrique associé à la norme $\|.\|$ est un espace métrique complet. ....$(0,5$ pts$)$
   On a $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E car

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty : E &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ f &\longmapsto \|f\|_\infty \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \|f\|_\infty = 0 \Longleftrightarrow f = 0, \text{.............(0,5 pts)} \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f \in E : \|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \|f\|_\infty, \quad \text{(Homogénéité),.......(0,5 pts)} \\ \forall f, g \in E : \|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty, \quad \text{(Inégalité triangulaire).............(0,5 pts)} \end{cases}$$

Soit (f_n) une suite de Cauchy dans E. i.e. $\lim_{n,m\to+\infty} \|f_n - f_m\|_\infty = 0$. Ce qui donne $(f_n(x))$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ (Banach), elle converge vers $(f(x))$.
Donc (f_n) converge vers $f \in E$. ....$(01$ pts$)$.

2. $T : E \to E, \forall f \in E : T_f(x) = T(f)(x) = f^{'}(x), \forall x \in [0,1]$.
T n'est pas continue. ....$(0,5$ pts$)$
Justification : Grace au théorème ci-dessous, on peut prend une suite $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}; n \in \mathbb{N}^{\star}$, qui converge vers 0.
Mais $T(f_n)(x) = f_n'(x) = \cos(nx)$ n'est pas converge vers $T(0)(x) = 0$. ....(01 pts)

Théorème : Soient $(E,d),(F,\delta)$ deux espaces métrique, l'application $T : (E,d) \to (F,\delta)$ est continue au point θ si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E converge vers θ, la suite image $T((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $T(\theta)$.

Notre espoir est d'avoir réussi !
Votre enseignant Mr. H. Abdelaziz