Université Mohamed Boudiaf-M'sila — *2 éme Année Licence Maths*
Département des Mathématiques-MI — **Date :** *19-01-2023.* **Durée :** *01h30*
Module: Introduction à la Topologie

EXAMEN FINAL

Exercice 01 :(05 pts) Soient $E = \{a, b, c\}$, et la famille $\tau = \{\emptyset, E, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$

1. Montrer que (E, τ) est un espace topologique ?
2. Donner l'ensemble F de tous fermés de l'espace (E, τ) ?
3. On pose $D = \{b, c\}$
   Déterminer l'intérieur de D, l'adhérence de D, et τ_D la trace de la topologie (E, τ) sur D ?
4. Soit la famille $\sigma = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b, c\}\}$
   Montrer que l'espace topologique (E, σ) n'est pas connexe ?
5. Soit l'application $f : (E, \tau) \to (E, \sigma)$ définie par : $\forall x \in E : f(x) = x$,
   Etudier la continuité de l'application f au point $\alpha = b$?

Exercice 02 :(05 pts)

Soit l'application $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, définie par : $d(n, m) = \begin{cases} 0 & si \quad n = m \\ 1 + \dfrac{1}{n+m} & si \quad n \neq m \end{cases}$

1. Vérifier que d est une distance sur $\mathbb{N}$?
2. Soit $r > 0$. Décrire en fonction de r la boule ouverte $B(0, r)$?
3. Quelles sont les suites de Cauchy dans $(\mathbb{N}, d)$?
4. $(\mathbb{N}, d)$ est-il complet ?

Exercice 03 :(05 pts)
Considérons l'espace métrique $(\mathbb{R}^2, d_2)$, et soit les quatre ensembles suivants :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2\},\ B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\},$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},\ D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$$

1. Tracer dans un repère orthonormé A, B, C, et D ?
2. Etudier la compacité de A, B, et D ?
3. Etudier la connexité de C ?

Exercice 04 :(05 pts)
Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

1. Est ce que $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach ? Justifier votre réponse ?
2. Soit la fonction $T : E \to E$, définie par :

$$\forall f \in E : T_f(x) = T(f)(x) = f^{'}(x), \forall x \in [0, 1]$$

   Est ce que T est continue ? Justifier votre réponse ?

Remarque : $f^{'}$ la dérivée de f.