Université Mohamed Boudiaf-M'sila *2 éme Année Licence Maths*
Département des Mathématiques-MI **Date :** *..-..-2023.* **Durée :** *01h30*
Module: Introduction à la Topologie

Examen de rattrapage

Exercice 01 :(06 pts) Soient $E = \{1, 2, 3\}$, et la famille $\tau = \{\emptyset, E, \{1\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$

1. Montrer que (E, τ) est un espace topologique ?
2. Donner l'ensemble F de tous fermés de l'espace (E, τ) ?
3. On pose $D = \{1, 3\}$
   Déterminer l'intérieur de D, l'adhérence de D et τ_D la trace de la topologie (E, τ) sur D ?
4. Soit la famille $\sigma = \{\emptyset, E, \{1\}, \{2, 3\}\}$,
   Montrer que l'espace topologique (E, σ) n'est pas connexe ?
5. Soit l'application $f : (E, \tau) \to (E, \sigma)$ définie par : $\forall x \in E : f(x) = x$,
   Etudier la continuité de l'application f au point $\alpha = 2$?

Exercice 02 :(04 pts)
Soit l'application $d : \mathbb{R}_\star^+ \times \mathbb{R}_\star^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, définie par : $d(x, y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$

1. Vérifier que d est une distance sur $\mathbb{R}_\star^+$?
2. Définir une boule de centre 1 et de rayon r ?
3. On pose $x_n = \sqrt{n}, n \in N^\star$. La suite (x_n) est-elle de Cauchy pour cette distance ?

Exercice 03 :(06 pts)
Considérons l'espace métrique $(\mathbb{R}^2, d_2)$, et soit les quatre ensembles suivants :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2\},\ B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},\ D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x.y > 1\}$$

1. Tracer dans un repère orthonormé A, B, C, et D ?
2. Etudier la compacité de A et B ?
3. Montrer que C est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$?
4. Etudier la connexité de l'ensemble D ?

Exercice 04 :(04 pts)
Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, l'application

$$N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(x)|\, dx,$$

Est ce que (E, N) est un espace vectoriel normé ? Justifier votre réponse ?

Remarque : $f^{'}$ la dérivée de f.