Université 8 Mai 1945/ Guelma

Cours Licence

Topologie des espaces Métriques

Dr HITTA Amara

Maître de Conférences Habilité

Site Perso: http://www.hittamara.com 2009-2010

Introduction

Objectifs : Généraliser l'utilisation des concepts et du vocabulaire de la topologie générale. Etendre et approfondir les fondements d'analyse vus en premier cycle. Il s'agit d'un module de base qui fournit des outils fondamentaux.

La topologie est une théorie mathématique relativement jeune : elle émerge (sous le nom d'analysis situs) au début du vingtième siècle dans les travaux de Hausdorff et de Tychonoff. Le besoin d'une telle théorie s'est déjà fait sentir à la fin du dix-neuvième siècle dans les travaux de Riemann et de Hilbert. Dans la recherche actuelle, la topologie joue un rôle fondamental aussi bien en Analyse Fonctionnelle qu'en Géométrie Différentielle ou encore en Topologie Algébrique. Ci-dessous, quelques grands noms de la Topologie :

- Henri Poincaré (1854-1912) ; (homotopie, cohomologie)
- David Hilbert (1862-1943) ; (bases de Hilbert, espaces de Hilbert)
- Maurice Fréchet (1878-1973) ; (convergence uniforme, convergence compacte)
- Stefan Banach (1892-1945) ; (fondateur de l'Analyse Fonctionnelle, espaces de Banach)

Ce cours n'est cependant qu'une introduction aux notions de base. Il contient le strict minimum pour celui qui souhaite poursuivre les études en mathématiques. Comme la topologie repose sur relativement peu de connaissances aquises, elle présente l'occasion idéale pour l'étudiant de combler d'éventuelles lacunes en logique ou en théorie des ensembles. C'est la raison pour laquelle la plupart des énoncés sont suivis d'une preuve complète.

Le dernier chapitre contient une collection d'exercices. Ces exercices servent à la fois à mieux familiariser l'étudiant avec les notions apprises en cours, et à compléter le cours là où le temps nécessaire manquait.

Programme :

- ☞ Espaces topologiques. Illustration par les espaces métriques.
- ☞ Espaces métriques : Ouverts, fermés, voisinages. Sous-espaces métriques. Suites. Limites. Continuité et continuité uniforme. Homéomorphismes.
- ☞ Espaces normés. Espaces complets. Espaces de Banach. Normes d'applications linéaires et multilinéaires continues.
- ☞ Théorème du point fixe et ses applications aux fractals. Prolongement uniformément continu. Théorème de Baire.
- ☞ Espaces compacts. Compacité locale : théorème de Riesz. Caractérisation des compacts de $\mathbb{R}^n$.
- ☞ Espaces connexes et connexes par arcs. Connexes de $\mathbb{R}$. Eléments d'analyse matricielle, rayon spectral.
- ☞ Espaces de fonctions continues. Topologie de la convergence uniforme. Théorème de Stone-Weierstrass. Théorème d'Ascoli.

etc ....

Chapitre 1

Espaces Métriques

La notion de distance entre deux points du plan ou de l'espace nous est familière. L'exemple fondamental déjà étudié est celui de $\mathbb{R}$ qui est un exemple très limité. En effet, de nombreux problèmes ne peuvent se modéliser que sur des espaces vectoriels de dimension plus grande. Pensons, par exemple, à des modélisations de systèmes physiques comportant un nombre n de paramètres. L'étude de ces systèmes se fera via l'étude de fonctions possédant n variables et donc définies sur $\mathbb{R}^n$. Ce qui nous conduit à transposer les notions telles que la continuité des fonctions, la convergence des suites et voir même les notions de dérivabilité, d'intégrabilité etc... Toutes ces notions font intervenir la notion de distance. La théorie générale sur les espaces topologiques englobe, bien evidemment, ces deux exemples mais conduit parfois à des situations compliquées donc moins intuitives.

1.1 Espaces métriques

La définition suivante généralise la notion de distance dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$.

Définition **1.1.1** **(Espace métrique).** *Une space métrique* (X, d) *est un ensemble* X *muni d'une application* $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, *appelée* **distance ou métrique**, *qui satisfait les propriétés suivantes :*

(D.1) $\forall x, y \in X, \quad d(x, y) \geq 0$ *et* $d(x, y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$.

(D.2) $d(x, y) = d(y, x)$, **(symétrie)**.

(D.3) $\forall x, y, z \in X, \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, **(inégalité triangulaire)**.

Exemple **1.1.1** L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

est un espace métrique. ◆

Exemple 1.1.2 Sur l'espace $\mathbb{R}^n$, on peut définir plusieurs distances faisant intervenir les distances entre les composantes. Soient $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. On définit deux distances, à savoir

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i|, i = 1, ..., n\} \qquad \text{et} \qquad d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

La troisième est ce qu'on appelle la **distance euclidienne** :

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1,\cdots,n} (x_i, y_i)^2}. \quad ◆$$

Exemple 1.1.3 On peut définir une distance, dite **discrète**, sur un ensemble quelconque X en posant, pour $x, y \in X$:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases} \quad ◆$$

Exemple 1.1.4 Distance induite. Si (X, d) est un espace métrique et A un sous-ensemble de X, la restriction :

$$d|_{A\times A} : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une distance sur A. Ainsi, la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^3$ induit une distance sur la sphère

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ |x^2 + y^2 + z^2 = 1\}. \quad ◆$$

Exemple 1.1.5 (Distance produit). Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques; on peut définir une distance sur l'espace produit $X \times Y$ par :

$$d[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = \sup\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\},$$

faisant de l'ensemble produit $(X \times Y, d)$ un nouveau espace métrique. ◆

Exemple 1.1.6 Soit $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) = \{f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continue}\}$. Si $f, g \in \mathcal{C}[0, 1], \mathbb{R})$ on pose :

$$d_\infty(f, g) = \sup_{t\in[0,1]} \{|f(t) - g(t)\}. \quad ◆$$

Proposition **1.1.2** *Pour tous* $\boldsymbol{x, y}$ *et* $\boldsymbol{z}$ *des points d'un espace métrique* $(\boldsymbol{X, d})$, *on a*

$$\boxed{|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z).}$$

Preuve : La condition D.2 que vérifie la distance d nous donne $d(x,z) - d(x,y) \leq d(y,z)$. En utilisant la symétrie, on obtient $d(x,y) - d(x,z) \leq d(z,y) = d(y,z)$. De ces deux inéquations, on en déduit que $|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z)$. ◆

Définition **1.1.3** *Une application* $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *est dite* **sous-additive** *si*

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \quad \varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y).}$$

Proposition **1.1.4** Soient (X, d) un espace métrique et $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application croissante sous-additive et ne s'annulant qu'en 0. Alors $\varphi \circ d$ est une distance sur X.

Exemple **1.1.7** Soit (X, d) un espace métrique. Comme, les applications

$$\varphi(u) = \min\{1, u\} \quad \text{et} \quad \varphi(u) = \frac{u}{1+u}$$

sont sous-additives croissantes et ne s'annulant que pour 0, alors

$$\boxed{\delta(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} \quad \text{et} \quad \sigma(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}}$$

sont deux distances sur X qui ont la propriété d'être bornées par 1. ◆

Sans perte de généralité, on peut toujours supposé que la distance d'un espace métrique est bornée.

1.2 Ouverts, fermés et voisinages

Considérons un espace métrique (X, d).

Définition **1.2.1** *Soient* $a \in X$ *et* $r \in \mathbb{R}^+$.

- *La* **Boule ouverte** *de centre* a *et de rayon* r *est*

$$\boxed{B(a,r) = \{x \in X \mid d(a,x) < r\}.}$$

- *La* **Boule fermée** *de centre* a *et de rayon* r *est*

$$\boxed{\overline{B(a,r)} = \{x \in X \mid d(a,x) \leq r\}.}$$

- *La* **Sphère** *de centre* a *et de rayon* r *est*

$$\boxed{S(a,r) = \{x \in X \mid d(a,x) = r\}.}$$

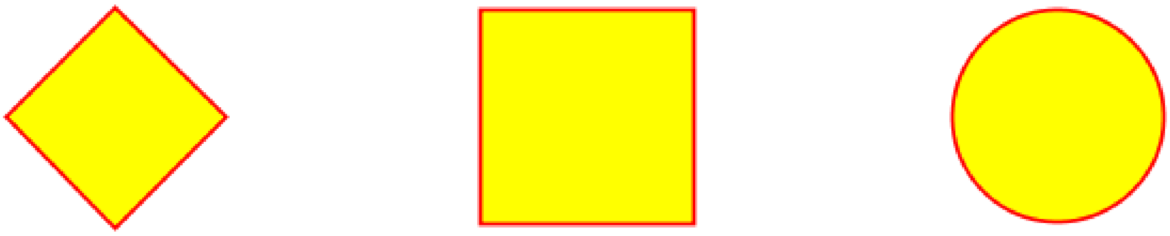
Exemple 1.2.1 Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle $d(x,y) = |x-y|$ on a

$$B(1,1) =]0,2[\quad \text{et} \quad \overline{B(1,1)} = [0,2].$$

Pour $a \in \mathbb{R}$ et r un réel strictement positif, on a

$$B(a,r) =]a-r, a+r[\quad \text{et} \quad \overline{B(a,r)} = [a-r, a+r]. \;\blacklozenge$$

Exemple 1.2.2 Dans $\mathbb{R}^2$, les boules ouvertes (resp. fermées) de rayon 1 :



pour les distances d_1, d_∞ et d_2 (resp. y compris les frontières). ◆

Définition 1.2.2 *Soient* $a \in (X,d)$ *et* $r \in \mathbb{R}^+$.

- *Le sous-ensemble* U de (X,d) *est dit* **ouvert**, si

$$\boxed{\forall x \in U, \exists r > 0 \ \text{ tel que } \ B(a,r) \subset U.}$$

- Le sous-ensemble F de (X,d) est dit **fermé**, si son complémentaire est un ouvert :

$$\boxed{F \subset X, \ F \text{ fermé} \iff \forall x \in \complement_X F, \exists r > 0 \ \text{ tel que } \ B(a,r) \subset \complement_X F.}$$

Pour $0 < r < r'$ on a les inclusions suivantes :

$$B(x,r) \subset \overline{B(x,r)} \subset B(x,r')$$

La première inclusion étant facile. La seconde se démontre ainsi : Si $y \in \overline{B(x,r)}$ alors $d(x,y) \leq r$ comme $r < r'$ alors $d(x,y) < r'$ donc $y \in B(x,r')$ d'où l' inclusion souhaitée.

Remarque : D'après ces inclusions, il est clair que l'on peut remplacer l'adjectif "fermée" par "ouverte". ◀

Théorème 1.2.3 Toute boule ouverte de l'espace métrique (X,d) est un ouvert. Toute boule fermée de l'espace métrique (X,d) est un fermé.

Preuve : Soit y un point de la boule ouverte $B(x,r)$ de centre x et de rayon r. On a $d(x,y) < r$. Si on pose $\rho = r - d(x,y) > 0$ alors $B(y,\rho) \subset B(x,r)$. Pour le voir, supposons que $z \in B(y,\rho)$, alors

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + \rho = r$$

ce qui montre que $z \in B(x,r)$. De même, si y n'appartient pas à la boule fermée $\overline{B(x,r)}$, on a $\rho = d(x,y) - r > 0$. La boule ouverte $B(y,\rho)$ est disjointe de $\overline{B(x,r)}$. En effet, considérons $z \in B(y,\rho) \setminus \overline{B(x,r)}$, on doit avoir

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < r + \rho = d(x,y)$$

ce qui est absurde. Donc $E \setminus \overline{B(x,r)}$ est un ouvert et $\overline{B(x,r)}$ sera alors un fermée. ◆

Définition 1.2.4 *Si F est une partie fermée non vide de l'espace métrique (X,d), on appelle distance d'un point x de X au fermé F le nombre positif ou nul*

$$\boxed{d(x,F) = \inf_{z \in F} d(x,z)}$$

Théorème 1.2.5 La distance d'un point x au fermé F est nulle si et seulement si x appartient à F. De plus, si x et y sont des points de E, on a

$$\boxed{|d(x,F) - d(y,F)| \leq d(x,y).}$$

Preuve : Si $x \in F$, on a clairement $0 \leq d(x,F) \leq d(x,x) = 0$. Inversement, si $x \notin F$, il existe une boule ouverte $B(x,r)$ disjointe de F, ce qui montre que, pour tout y de F, $d(x,y) \geq r$, donc $d(x,F) \geq r > 0$. Si z est un point quelconque de F, on a $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, donc, en passant à la borne inférieure, on a $d(x,F) \leq d(x,y) + d(y,z)$ pour tout z de F. Et passant à nouveau à la borne inférieure $d(x,F) \leq d(x,y) + d(y,F)$, c'est-à-dire $d(x,F) - d(y,F) \leq d(x,y)$. En intervertissant x et y, on obtient $d(y,F) - d(x,F) \leq d(x,y)$, d'où l'inégalité cherchée. ◆

Définition 1.2.6 *Soit (X,d) un espace métrique. Soit A et B deux parties de X on appelle distance entre A et B la quantitée*

$$\boxed{d(A,B) = \inf\{d(x;y) : x \in A, y \in B\}}$$

Exemple 1.2.3 Si on prend $A = \{0\} \subset \mathbb{R}$ et $B = \left\{\dfrac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$ alors $d(A,B) = 0$ tandis que $A \neq B$. Ainsi, la distance entre les parties ne définit pas vraiment une distance sur $\mathcal{P}(X)$. ◆

Définition 1.2.7 *On appelle diamètre d'une partie A de (X,d) et on note diam(A) la quantitée*

$$\boxed{\text{Diam}(A) = \sup\{d(x,y) : x \in A, y \in A\}.}$$

Soit (X,d) un espace métrique. On dit qu'une partie A de X est bornée s'il existe une boule fermée $\overline{B(x_0,r)}$ tel que

$$\boxed{A \subset \overline{B(x_0,r)} \iff \forall x \in A,\ d(x_0,x) \leq r.}$$

On vérifie immédiatement qu'une partie A de X est bornée si et seulement si son diamètre est fini.

On note par $\mathcal{F}(X,Y)$ l'ensemble des applications de l'ensemble X dans l'ensemble Y.

Définition 1.2.8 *Soit X un ensemble et (Y,d) un espace métrique. Une application $f : X \longrightarrow Y$ est bornée si son image $f(X) \subset Y$ est bornée pour la distance d. On note par $\mathcal{F}_b(X,Y)$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}(X,Y)$ des fonctions bornées.*

On peut munir l'ensemble $\mathcal{F}_b(X,Y)$ d'une distance dite **distance de la convergence uniforme**, notée d_∞. Elle est définie comme suit

$$\boxed{\forall f,g \in \mathcal{F}_b(X,Y),\quad d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X}(f(x),g(x)).}$$

La boule de centre f et de rayon r est l'ensemble des fonctions dont le graphe se trouve entre les deux courbes en pointillés, déduites de f par translation paralèlement à l'axe des ordonnées. Dans ce cas, on a $d_\infty(f,g) \leq r$.

Exemple 1.2.4 Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, $U =]0,1[$ est un ouvert. En effet, si on pose, pour tout $x \in U$, $r = \min\{x, 1-x\}$ on vérifie aisément que $B(x,r) \subset U$. ◆

Proposition 1.2.9 Soit (X,d) un espace métrique. On a les propriétés suivantes :

(O.1) Toute intersection finie d'ouverts de X est un ouvert de X.

(O.2) Toute réunion, finie ou non, d'ouverts de X est un ouvert de X.

Preuve : Soit $(U_i)_{i=1}^n$ une famille finie d'ouverts de X. Posons $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$. Si U est vide, il est ouvert. Sinon, pour tout $x \in U$, alors $x \in U_i$ pour $i \in \mathbb{I} \subset \{1, \cdots, n\}$. Comme chaque $U_i, i \in \mathbb{I}$ est ouvert, il existe $r_i \in \mathbb{R}^+$ tel que $B(x, r_i) \subset U_i$. Posons $r = \min_{i\in\mathbb{I}} r_i$. Alors, pour tout $i \in \mathbb{I}$, on a

$$B(x,r) \subset B(x,r_i) \subset U_i.$$

Donc

$$B(x,r) \subset \bigcap_{i\in\mathbb{I}} B(x,r_i) \subset \bigcap_{i=1}^n B(x,r_i) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i = U.$$

D'où U est un ouvert de X. ◆

Il découle, de cette preuve, qu'un ouvert contient au moins une boule centrée en chacun de ses points. Ainsi, U contient toute boule centrée en chacun de ses points, donc il est ouvert. ◆

Remarque : Le caractère "fini" est important pour la propriété **(O.1)** puisque l'intersection d'un nombre infini d'ouverts n'est pas toujours un ouvert. Prenons, par exemple, dans $X = \mathbb{R}^n$, chaque $B\left(0, \frac{1}{n}\right)$ est un ouvert alors que $\bigcap_{i=1}^n B\left(0, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$ n'est pas ouvert. ◆

Exemple 1.2.5 Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, tout intervalle ouvert est ouvert, tout intervalle fermé est fermé. Un intervalle de la forme $]-\infty, a]$ ou $[a, +\infty[$ est fermé. En effet, $\mathbb{R}$ est ouvert. Un intervalle de la forme $]a,b[$, avec a et b finis, est une boule ouverte car

$$]a,b[= B(x_0, r) \quad \text{où} \quad x_0 = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad r = \frac{a-b}{2}.$$

De même, $[a, b]$ est une boule fermée car $[a, b] = \overline{B(x_0, r)}$. Par ailleurs

$$]a, +\infty[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]a, a+n[$$

donc $]a, +\infty[$ est un ouvert. Le même raisonnement s'applique à $]-\infty, a[$ qui est ouvert. Il s'ensuit que $[a, +\infty[=]-\infty, a[^c$ est fermé et de même $]-\infty, a]$ est fermé. ◆

Proposition 1.2.10 Soit (X, d) un espace métrique. On a les propriétés suivantes :

(F.1) Toute réunion finie de fermés de X est un fermé de X.

(F.2) Toute intersection, finie ou non, de fermés de X est un fermé de X.

Preuve : Immédiat, par passage au complémentaire. ◆

Remarque : La réunion infinie de fermés peut ne pas être fermé. Prenons dans $\mathbb{R}$ la famille de fermés $F_n = \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$. Leurs réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n =]-1, 1[$ n'est pas fermé.

Remarque : Dans un espace métrique (X, d), il existe des ensembles à la fois ouverts et fermés, par exemple $\emptyset$ et X. Lorsque d est la distance discrètes, tous les sous-ensembles de X sont à la fois ouverts et fermés. D'autre part, il se peut que des ensembles ne soient ni ouvert ni fermé, par exemple, l'intervalle semi-ouvert $]a, b]$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$. ◆

Définition 1.2.11 *On dit qu'une partie V d'un espace métrique (X, d) est un voisinage d'un point x_0 si V contient un ouvert contenant x_0.*

On note par $\mathcal{V}(x_0)$ l'ensemble des voisinage du point $x_0 \in X$. Ainsi

$$\boxed{V \in \mathcal{V}(x_0) \iff \exists O \in \mathcal{O} : x_0 \in O \subset V.}$$

Un voisinage de x_0 peut-être définie par

$$V \in \mathcal{V}(x_0) \iff \exists \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) \subset V$$

On en déduit alors que :

> *Une partie non vide de X est ouverte si et seulement si elle est voisinage de chacun de ses points.*

1.3 Intérieur et adhérence

Définition 1.3.1 *Soit $A \subset X$ un sous-ensemble de l'espace métrique (X, d). L'adhérence $\bar{A}$ de A est :*

$$\boxed{\bar{A} = \{x \in X \mid \forall r > 0,\ B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}.}$$

Remarquons que $A \subset \bar{A}$ car : si $x \in A$ alors pour tout $r > 0$, on a $x \in B(x, r) \cap A$.

Proposition 1.3.2 *On établit un lien entre un fermé et l' adhérence par :*

- *A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.*
- *$\overline{A} = \{x \in X \mid \exists$ une suite $\{x_n\} \subset A$ telle que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x\ \}$.*

Preuve : Si A est fermé, alors $X \setminus A$ est ouvert. Soit $x \notin A$, donc $x \in X \setminus A$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset X \setminus A$ et $x \notin \overline{A}$ c'est-à-dire que $\overline{A} \subset A$ donc $\overline{A} = A$ car $A \subset \overline{A}$. Réciproquement, si $A = \overline{A}$ et $x \in X \setminus A$, alors $x \notin \overline{A}$, donc $\exists r > 0$ tel que $B(x, r) \cap A = \infty$, c'est-à-dire $B(x, r) \subset X \setminus A$.
Pour la deuxième partie, Si $x_0 \in \overline{A}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $B(x_0, 1/n) \cap A \neq \emptyset$, donc il existe $x_n \in B(x_0, 1/n) \cap A \neq \emptyset$ et $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Réciproquement, s'il existe une suite $\{x_n\}$ de A telle que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ alors $\forall r > 0$ on a $x_n \in B(x_0, r) \cap A$ pour $n > N$ et on a bien $B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$. ◆

En fait, on peut caractériser $\overline{A}$ de la manière suivante :

Proposition 1.3.3 L'adhérence $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A c'est-à-dire que si F est un fermé et $A \subset F$ alors $\overline{A} \subset F$:

$$\boxed{\overline{A} = \bigcap_{A \subset F \text{ Fermé}} F.}$$

Preuve : Supposons que F est un fermé contenant A et montrons que $\overline{A} \subset F$ ce qui est équivalent à montrer que $X \setminus F \subset X \setminus \overline{A}$. Mais si $x \in X \setminus F$, alors $x \notin F$ alors x est un point de l'ouvert $U = X \setminus F$ qui ne rencontre pas A c'est-à-dire $U \cap A = \emptyset$ donc $x \notin \overline{A}$ soit que $x \in X \setminus \overline{A}$. ◆

De même, on peut définir l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ de A comme étant le plus grand ouvert contenu dans A c'est-à-dire

$$\boxed{\overset{\circ}{A} = \bigcup_{U \text{ ouvert } \subset A} U.}$$

Exemple 1.3.1 On considère, dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, $A = [0,1[$. Alors $\overset{\circ}{A} =]0,1[$ et $\bar{A} = [0,1]$. ◆

Exemple 1.3.2 L'adhérence de $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$ puisque tout nombre réel est limite de nombres rationnels. ◆

Exemple 1.3.3 D'après le théorème de Weierstrass, toute fonction $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ est limite uniforme (pour la norme $\|\ \|_\infty$) d'une suite de polynôme de $\mathcal{P}([0,1],\mathbb{R})$. Donc

$$\boxed{\overline{\mathcal{P}([0,1],\mathbb{R})} = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}).}$$

Notons que l'on a une certaine dualité entre fermeture et intérieur.

Proposition 1.3.4 Soit A une partie non vide d'un espace métrique (X,d), alors

$$\boxed{\complement_X(A^\circ) = \overline{\complement_X A} \quad \text{et} \quad \complement_X \overline{A} = (\complement_X A)^\circ}$$

Preuve : Montrons la première égalité. Par définition, $A^\circ = \bigcap_{i\in I} U_i$ où $(U_i)_{i\in I}$ désigne la famille de tous les ouverts contenus dans A. Donc

$$\complement_X(A^\circ) = \complement_X\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcap_{i\in I} \complement_X U_i = \bigcap_{i\in I} F_i$$

avec $F_i = \complement_X U_i$, fermé de X. La famille $(F_i)_{i\in I}$ désigne la famille des fermés contenant $\complement_X A$. La partie $\complement_X(A^\circ)$ est donc l'adhérence de $\complement_X A$. La deuxième formule se déduit de la première en y remplaçant A par $\complement_X A$. ◆

On signal, enfin, qu'on est, parfois, amené à faire la différence entre deux notions subtiles de points d'adhérence à savoir :

1. Un point $x \in A$ est dit **isolé** s'il existe un voisinage V de x tel que $V \cap A = \{x\}$.
2. Un point $x \in X$ est dit **point d'accumulation** si tout voisinage V de x contient au moins un point de A distinct de x.

Définition 1.3.5 *Soit A un sous-ensemble d'un espace métrique (X,d). On dit que A est dense dans X si $\overline{A} = X$.*

Traduction : Pour tout $x \in X$, il existe une suite $(x_n) \subset A$ qui converge vers x. On notera que, si on remplace une distance par une distance équivalente, les ensembles denses restent les mêmes.

Exemple 1.3.4 Dans $\mathbb{R}$, un nombre est décimal lorsqu'il s'écrit : $n10^{-k}$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est un anneau pour les deux opérations usuelles et l'on a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$. Comme tout $x \in \mathbb{R}$ est limite de la suite de ses approximations décimales de la forme $x_n = E(x10^{-n}).10^{-n}$ alors $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{R}$ et on obtient que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. ◆

Exemple 1.3.5 **Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, $\mathbb{Q}$ et $R \setminus \mathbb{Q}$ sont denses.** En effet, soient $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$. Alors $B(x, r) =]x - r, x + r[$. On rappelle qu'entre deux réels distincts il y a toujours un nombre rationnel et un nombre irrationnel; ce qui implique $B(x, r) \cap Q \neq \emptyset$; et $B(x, r) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$. On trouve $x \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. ◆

Définition 1.3.6 *Soit A une partie d'un espace métrique (X, d). On appelle frontière de A l'ensemble, noté $Fr(A)$, défini par*

$$\boxed{Fr(A) = \overline{A} \setminus \complement_X A^{\circ}.}$$

La frontière de A est un fermé, puisqu'elle s'écrit comme intersection de deux fermés, à savoir

$$\boxed{Fr(A) = \overline{A} \cap \complement_X(A^{\circ}) = \overline{A} \cap \overline{\complement_X A}.}$$

Ainsi, une partie et son complémentaire admettent la même frontière :

$$x \in Fr(A) \iff \forall V \in \mathcal{V}(x) \text{ alors } V \cap A \neq \emptyset \text{ et } V \cap \complement_X A \neq \emptyset.$$

Exemple 1.3.6 **(Frontière des ensembles usuels)** Dans $\mathbb{R}$:

① $Fr(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ car $\mathbb{Z}$ est un fermé d'intérieur vide $\mathring{\mathbb{Z}} = \emptyset$.

② Comme tout boule ouverte contient des nombres rationnels et des nombres irrationnels alors $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$ et $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\circ} = \emptyset$. Comme $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ alors $Fr(\mathbb{Q}) = Fr(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

③ $Fr([0, 1]) = \{0, 1\}$.

④ Dans $\mathbb{R}^2$, la frontière d'un carrée est

$$Fr([0,1]) \times [0,1]) = ([0,1]) \times \{0\}) \bigcup ([0,1]) \times \{1\}) \bigcup (\{0\} \times [0,1])) \bigcup (\{1\} \times [0,1])).$$ ◆

Théorème 1.3.7 **(Séparation de Hausdorff).** Soit (E, d) un espace métrique et deux points $x \neq y$ de E. Alors il existe deux boules ouvertes disjointes contenant respectivement x et y.

Preuve : Il suffit de prendre $r = d(x,y)/2$ et de choisir $x \in B(x,r)$ et $y \in B(y,r)$. Les boules choisis sont dijointes. En effet, si point $z \in B(x,r) \cap B(y,r)$, on obtient : $d(x,z) < r$ et $d(y,z) < r$. L'inégalité triangulaire nous donne

$$2R = d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) < 2R,$$

une contradiction. Donc z n'existe pas. ◆

1.4 Sous-espace métrique, produit des espaces métriques

Soit (E,d) un espace métrique et F une partie non vide de E. Il est évident que la restriction d_F de d à $F \times F$ est une distance sur F. L'espace métrique (F, d_F) sera dit sous-espace métrique de (E,d).
Soit $(E_i, d_i)_{i \in [1,n]}$ une famille finie de n espaces métriques. Sur l'ensemble $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ (produit cartésien) on définit la distance $d' : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in E, \qquad d'(x,y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)$$

On appelle (E,d) espace **métrique produit** de la famille $(E_i, d_i)_{i \in [1,n]}$.
Dans le cas d'une famille dénombrable d'espace métriques $(E_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on ne peut pas généraliser la formule précédente sur $E = \prod_{n \in \mathbb{N}} E_n$ car, en général la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} d_n(x_n, y_n)$ ne converge pas. Par contre, en considérant les distances sur les espaces E_n données, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$(x_n, y_n) \longrightarrow \frac{1}{2n} . \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)},$$

qui sont topologiquement équivalentes aux distances d_n on d´éfinit :

$$\forall x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, d(x,y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2n} . \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}.$$

Il est évident que la série définissant $d(x,y)$ converge, car son terme général est majoré par $\dfrac{1}{2n}$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente. Il est facile de montrer que d est une distance sur E. On appelle (E,d) espace métrique produit de la famille dénombrable d'espaces métriques $(E_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il est utile de remarquer que dans le cas d'une famille finie d'espaces métriques $(E_i, d_i)_{i \in [1,n]}$, l'application

$$(x,y) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i} . \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)}$$

définit une distance sur $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ topologiquement équivalente à la distance d' donnée auparavant.

1.5 Continuité d'applications

Soient X et E deux ensembles et f une application de X dans E. On rappelle que :

- Pour tout sous-ensemble A de X, on appelle **image** de A par f, et on note $f(A)$, le sous-ensemble de E défini par : $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$.
- Pour tout sous-ensemble B de E, on appelle **image réciproque** (ou antécédent) de B par f, et on note $f^{-1}(B)$ le sous-ensemble de X défini par : $f^{-1}(B) = \{x \in E | f(x) \in B\}$.

Une suite (x_n) de l'espace métrique (E, d) est dite convergente vers $\ell \in E$ si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, \ell) < \varepsilon.}$$

Définition 1.5.1 *Soient (X, d) et (E, δ) deux espaces métriques. Une application $f : X \longrightarrow E$ est dite continue en $x \in X$ si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers x, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E converge vers l'image de x par f. Soit :*

$$\boxed{\lim_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) = f\left(\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n\right).}$$

L'application $f : X \longrightarrow E$ est dite continue si f est continue en tout $x \in X$.

Théorème 1.5.2 Pour une application $f : (X, d) \longrightarrow (E, \delta)$, les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

① f est continue.

② $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ pour tout $A \subset X$.

③ L'image réciproque de tout fermé de E est un fermé de X.

④ L'image réciproque de tout ouvert de E est un ouvert de X.

Preuve :

① $\Longrightarrow$ ② Soit $y \in f(\overline{A})$, c'est à dire qu'il existe $x \in \overline{A}$ tel que $f(x) = y$. Comme $x \in \overline{A}$, il existe une suite $((x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x. Comme f est continue (hypothèse ①), $f(x_n)$ converge vers $f(x) = y$. Comme $x_n \in A$, nous avons $f(x_n) \in f(A)$. Par conséquent, $y = f(x) \in \overline{f(A)}$.

② $\Longrightarrow$ ③ Soit F' un fermé de E. Par définition, l'image réciproque $F = f^{-1}(F') = \{x \in X | f(x) \in F'\}$ v´erifie $f(f^{-1}(F')) \subseteq F'$ (égalité si f est surjective) et $f^{-1}(f(\overline{F})) \subseteq \overline{F}$ (égalité si f est injective). Nous voudrions montrer que sous l'hypothèse ②, F est fermé. Nous allons montrer $F = \overline{F}$. Nous savons déjà que $F \subset \overline{F}$; il reste à montrer $\overline{F} \subset F$. On a

$$f(\overline{F}) \subset \overline{f(F)} = \overline{f(f^{-1}(F'))} \subset \overline{F'} \overset{\text{fermé}}{=} F'.$$

Ainsi $f(\overline{F}) \subset F'$ équivaut par définition à $\overline{F} \subset f^{-1}(F') = F$.

③ $\Longrightarrow$ ④ Nous utilisons la propriété suivante : pour toute application f, nous avons $f^{-1}(E \setminus F') = X \setminus f^{-1}(F')$. Nous obtenons donc $f^{-1}(U') = f^{-1}(E \setminus F') = X \setminus f^{-1}(F')$. D'après ③, $f^{-1}(F')$ est un fermé de X donc son complémentaire est un ouvert $U = f^{-1}(U')$.

④ $\Longrightarrow$ ① Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers x. Il faut monter que sous l'hypothèse ④, $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$ dans (E, δ), c'est à dire que toute boule $B(f(x), \varepsilon)$ contient presque tous les $f(x_n)$. L'hypothèse ④ implique que l'image réciproque $U = f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ est un ouvert de X; comme $f(x) \in B(f(x), \varepsilon)$, U contient x et il existe $B(x, r) \subset U$. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x, presque tous les x_n appartiennent à $B(x, r)$. Par conséquent, presque tous les $f(x_n)$ appartiennent à $f(B(x, r)) \subset f(U) \subset B(f(x), \varepsilon)$. Donc $f(x_n)$ converge vers $f(x)$. ◆

Remarque : L'image direct d'un ouvert (resp. fermé) par une application continue n'est pas forcément un ouvert (resp. fermé). Ainsi, l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(x) = (x^2, e^x)$ est continue. L'intervalle ouvert $\mathbb{I} =]-1, 1[$ a pour image $f(\mathbb{I}) =]0, 1[\times \left]\frac{1}{e}, e\right[$, non ouvert dans $\mathbb{R}^2$. L'intervalle fermé $\mathbb{R}_-$ a pour image $f(\mathbb{R}_-) = \mathbb{R}_+ \times]0, 1]$, non fermé dans $\mathbb{R}^2$. ◆

Définition 1.5.3 *Soient (X, d) et (E, δ) sont deux espaces métriques. Une application $f : X \longrightarrow E$ est dite* **uniformément continue** si

$$\boxed{(\forall \varepsilon > 0),\ (\exists \eta > 0),\ (\forall (x, y) \in X^2) d(x, y) < \eta \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon.}$$

Autrement dit, le diamètre de l'image par f de tout ensemble de diamètre inférieur à η est inférieur à ε. A noter que toute application uniformément continue est continue.

Exemple 1.5.1 La fonction $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$, par contre elle l'est sur tout intervalle fermé $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. En effet, pour tous réel $\varepsilon > 0$ et

$x_0 \in [a, b]$, on a

$$\begin{aligned} |x^2 - x_0^2| &= |x - x_0|.|x + x_0| \leq (|x| + |x_0|)(|x - x_0||) \\ &\leq 2|b||x - x_0|. \end{aligned}$$

On choisira η indépendamment de x, par exemple $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2|b|}$. ◆

Exemple 1.5.2 La fonction $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$. En effet, considérons les suites $x_n = n + \dfrac{1}{n}$ et $y_n = n$ On a toujours

$$|f(x_n) - f(y_n)| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2$$

bien que $|x_n - y_n| = \dfrac{1}{n}$. Aucun nombre η ne peut correspondre à $\varepsilon = 2$. ◆

Une application $f : (X, d) \longrightarrow (E, \delta)$ est dite **k-lipschitzienne** s'il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout

$$\boxed{(x, y) \in X \times X, \quad \delta(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).}$$

Exemple 1.5.3 Soit A une partie de l'espace métrique (X, d). Considérons la fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = d(x, A) = \inf\limits_{a \in A} d(x, a)$. Elle est 1-Lipchitzienne car

$$|f(x) - f(y)| = |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

En particulier, l'application norme : $x \longrightarrow \|x\|$ est 1-Lipchitzienne, car

$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\|. \quad ◆$$

Toute fonction k-lipschitziene est uniformément continue, puisque pour ε un réel positif donné, on peut choisir $\eta = \varepsilon/k$ indépendamment de x.

Une application $f : (X, d) \longrightarrow (E, \delta)$ est dite **isométrie** si,

$$\boxed{\forall (x, y) \in X^2, \quad \delta(f(x), f(y)) = \delta(x, y).}$$

Une isométrie est injective et 1-lipschitzienne, donc uniformément continue, donc continue. Une application $f : (X, d) \longrightarrow (E, \delta)$ est dite **homéomorphisme** si f est bijective, continue et l'inverse $f^{-1} : E \longrightarrow X$ est continue. Dans ce cas, les espaces métriques X et E sont dits **homéomorphes**.

Un homéomorphisme transporte les notions topologiques de X dans E. Ainsi, les ouverts, fermés et voisinages de X se transforme en ouverts, voisinages et fermés de E.

Chapitre 2

Espaces normés

En réalité, chacune des distances précédentes provient d'une norme, c'est une notion qui s'inspire de la structure d'espace vectoriel, en particulier la norme des vecteurs de l'espace.

2.1 Normes

Définition 2.1.1 (Espace normé). *Une space vectoriel normé* $(E, \| \ \|)$ *est un espace vectoriel* E *sur* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *muni d'une application* $\| \ \| : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$*, appelée norme, qui satisfait, pour tout* x *et* $y \in X$*, les propriétés suivantes :*

(N.1) $\|x\| \geq 0$ *et* $\|x\| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.

(N.2) $\|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|, \quad \lambda \in \mathbb{K}$.

(N.3) $\|x + y\| \geq \|x\| + \|y\|$, **(inégalité triangulaire)**.

Si $(E, \| \ \|)$ est un espace normé, on définit une distance associée par $d(x, y) = \|x - \|$. On vérifie, que les conditions sur la distance sont satisfaites.

Exemple 2.1.1 Sur $\mathbb{R}^n$ on définit les normes :

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_i|, i = 1, ..., n\}, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{et} \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Montrons, maintenant, que $\| \ \|_2$ est une norme. Soient $x = (x_i)_{i=1}^n$ et $y = (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, on a l'inégalité de **Cauchy-Schwarz** :

$$\boxed{\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \|x\|_2.\|y\|_2.}$$

Cette inégalité se montre en remarquant que le polynôme, en $\lambda \in \mathbb{R}^+$, suivant

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + y_i)^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \geq 0$$

est du même signe que le cœfficient de λ^2. Donc son descriminant est négatif, ce qui donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Les axiomes $(\mathbf{N.1})$ et $(\mathbf{N.2})$ sont facilement vérifiables. Pour l'axiome $(\mathbf{N.3})$, on utilise l'inégalité précédente

$$\begin{aligned} \|x+y\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\ &\leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|.\|y\| + \|y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \end{aligned}$$

Ce qui donne l'axiome $(\mathbf{N.3})$, en prenant les racines carrées des deux membres. ◆

Exemple 2.1.2 Soit l'espace $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$. Si $f \in \mathcal{C}[a,b],\mathbb{R})$ on vérifie que :

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \ x \in [a,b]\}, \ \ \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx \quad \text{et} \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx},$$

sont des normes. Montrons que $\| \ \|_\infty$ est une norme. Les axiomes $(\mathbf{N\ 1})$ et $(\mathbf{N\ 2})$ sont facilement vérifiables. Pour l'axiome $(\mathbf{N\ 3})$, on a pour tout $x \in [a,b]$:

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Donc

$$\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)+g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty. \ ◆$$

Exemple 2.1.3 (Fonctions continues sur un fermé borné) : Puisque toute fonction continue sur un fermé borné de $\mathbb{R}^n$, avec valeurs dans $\mathbb{R}^p$, est bornée, alors si K est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$ on peut définir la norme

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\|_{\mathbb{R}^p}, \ x \in K\}, \quad f \in \mathcal{C}(K,\mathbb{R}^p). \ ◆$$

Exemple 2.1.4 (Fonctions bornées) : Si X est un ensemble quelconque, l'espace $\mathcal{B}(X,\mathbb{R}^p)$ des fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}^p$, est un espace vectoriel normé pour la norme

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\|_{\mathbb{R}^p}, \ x \in X\}, \qquad f \in \mathcal{B}(X,\mathbb{R}^p).$$

Nous sommes, maintenant, en mesure de clarifier la notion de voisinage d'un point lorsqu'on travaille sur un espace X muni d'une distance d :

Définition **2.1.2** *Soit* $\{x_n\}$ *une suite dans* X*. On dit que cette suite converge vers* $a \in X$ *si :*

$$\boxed{\forall \varepsilon,\ \exists N_\varepsilon \ \text{tel que } n \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon.}$$

On écrit : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *ou encore* $x_n \to a$ *si* $n \to \infty$.

Nous remarquons que la limite lorsqu'elle existe, elle est unique.

Exemple **2.1.5** Si l'on munit $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\|\ \|_\infty$, dire qu'une suite $\{f_n\}$ de fonctions converge vers une fonction $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, c'est dire qu'elle **converge uniformément** vers f, ce qui implique en particulier la **convergence simple** : pour tout $t \in [0,1]$ fixé, la suite $\{f_n(t)\}$ converge vers f(t) convergence dans R). Par contre, dire que cette suite converge pour la norme $\|\ \|_1$ c'est dire qu'elle **converge en moyenne**, ce qui en général n'implique pas la convergence simple. Par exemple, la suite de fonctions $\{t^n\} \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ ne converge pas pour $\|\ \|_\infty$ (car ce ne pourrait être que vers la fonction identiquement nulle, et $\|t^n - 0\|_\infty = 1$), alors que pour la norme $\|\ \|_1$ elle converge vers la fonction nulle :

$$\|t^n - 0\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty.$$

2.2 Normes et distances équivalentes

Nous donnons une condition qui assure que deux distances (ou normes) définissent la même topologie sur un même espace c'est-à-dire qu'elles définissent les mêmes notions de limite et de continuité.

Définition **2.2.1** **(Distances équivalentes).** *Soient* d_1 *et* d_2 *deux distances sur l'ensemble X. On dira qu'elles sont équivalentes s'il existe deux constantes* $k_1 > 0$ *et* $k_2 > 0$ *telles que :*

$$\boxed{d_1(x,y) \leq k_1 d_2(x,y) \quad \text{et} \quad d_2(x,y) \leq k_2 d_1(x,y).}$$

Soient $\|\ \|_1$ *et* $\|\ \|_2$ *deux normes sur l'ensemble X. On dira qu'elles sont équivalentes s'il existe deux constantes* $k_1 > 0$ *et* $k_2 > 0$ *telles que :*

$$\boxed{\|x\|_1 \leq k_1 \|x\|_2 \quad \text{et} \quad \|x\|_2 \leq k_2 \|x\|_1.}$$

On dit que deux distances sur un même ensemble sont **topologiquement équivalentes** si les familles d'ouverts qu'elles définissent sont les mêmes, c'est-à-dire si toute partie ouverte de E pour l'une de ces distances est ouverte aussi pour l'autre.

Proposition 2.2.2 Si les distances d_1 est d_2 sont comparables, alors elles sont topologiquement équivalentes.

Preuve : Notons par $B_1(x,r)$ (resp. $B_2(x,r)$) la boule ouverte de centre $x \in E$ et de rayon $r > 0$ associée à la distance d_1 (resp. d_2). On remarque que, pour tout $x \in E$ et $r > 0$, $B_2(x,r) \subset B_1(x,k_1r)$ et $B_1(x,r) \subset B_2(x,k_2r)$. Donc, l'intérieur d'un ensemble par rapport à d_1 coïncide avec son intérieur par rapport à d_2. Comme un ensemble ouvert par rapport à une des distances, est égal à son intérieur (par rapport à la même distance), il résulte qu'il est ouvert par rapport à l'autre distance. ◆

Remarque 1. La réciproque est fausse. En effet, on peut montrer que sur tout espace métrique (E,d), la distance bornée $d' = \dfrac{d}{1+d}$ est topologiquement équivalente à d. Par contre, d et d' ne sont pas comparables en général, car d' est bornée et, en général, d ne l'est pas.

Exemple 2.2.1 Soit $X =]0,+\infty[$. On définit deux distances sur X par

$$d(x,y) = |x-y| \qquad \text{et} \qquad d'(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|.$$

On affirme que les deux distances sont topologiquement équivalentes. En fait, On devrait montrer que l'application $f = \mathrm{Id}_X : (X,d) \to (X,d')$ est continue en tout point $a \in X$, or ceci est vérifié puisque l'application $x \to \dfrac{1}{x}$ est continue en a, ce qui s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall x > 0 : |x-a| < \eta \Longrightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon.$$

Pour ce qui est de la continuité de l'application inverse $f^{-1} = \mathrm{Id}_X : (X,d') \to (X,d)$, remarquons que l'application $x \to \dfrac{1}{x}$ est continue en $\dfrac{1}{a}$, ce qui s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \rho > 0, \forall x > 0 : \left|x - \frac{1}{a}\right| < \rho \Longrightarrow \left|\frac{1}{x} - a\right| < \varepsilon$$

soit en posant $t = \dfrac{1}{x}$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \rho > 0, \forall t > 0 : \left|\frac{1}{t} - \frac{1}{a}\right| < \rho \Longrightarrow |t-a| < \varepsilon.$$

D'où, la continuité de l'application inverse $f^{-1} = \mathrm{Id}_X : (X,d') \to (X,d)$. ◆

Exemple 2.2.2 Les diverses normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, car on vérifie facilement que l'on a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \leq n\|x\|_\infty.}$$

Plus précisement, on a : *Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.*

Exemple **2.2.3** Considérons l'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $[0,1]$. Les normes

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|dt \quad \text{et} \qquad ||f||_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ne sont pas équivalentes. Pour $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ on a $||f||_1 \leq ||f||_2$. Dans le sense inverse, on peut trouver une suite $(f_n)_n$ de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que $||f_n||_1 \leq 1$ pour chaque n et par contre $||f_n||_2$ tend vers l'infini. Par exemple, la suite de fonctions

$$f_(t) = \begin{cases} 3n^2 t & \text{si } 0 \leq t \leq \dfrac{1}{3n} \\ n & \text{si } \dfrac{1}{3n} \leq t \leq \dfrac{2}{3n} \\ -3n^2\left(t - \dfrac{1}{n}\right) & \text{si } \dfrac{2}{3n} \leq t \leq \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \dfrac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Il se peut que deux distances définissent les mêmes notions de convergence sans être équivalentes au sens de la définition précédente. Par exemple, si (X,d) est un espace métrique, on vérifie facilement que la distance $d_1(x,y) = \inf\{1, d(x,y)\}$ définit la même notion de convergence que d, mais n'est pas équivalente à d ci celle-ci n'est pas bornée.

La proposition précédente est valable pour $\mathbb{C}^n$, car $\mathbb{C}^n$ peut être considéré comme un espace vectoriel de dimension $2n$ sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 3

Espace métriques complets

Soit (X, d) un espace métrique. Si $(x_n) \subset (X, d)$ est une suite, on notera une suite extraite de cette suite par $(x_{n_k}) \subset (X, d)$.

Définition 3.0.3 *On dit que $(x_n) \subset (X, d)$ converge vers $x \in X$ et on note $x_n \longrightarrow x$ si et seulement si $d(x_n, x) \longrightarrow 0$. On écrit alors $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ c'est-à-dire*

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ d(x_n, x) < \varepsilon \ \text{ si } \ n > n_0.}$$

Définition 3.0.4 *Soit (X, d) un espace métrique. Si $(x_n) \subset X$. Le point $x \in X$ est dit* **valeur d'adhérence** de la suite (x_n) s'il xiste une sous-suite (x_{n_k}) telle que $x_{n_k} \longrightarrow x$.

Exemple 3.0.4 Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, soit $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$. Alors 1 est une valeur d'adhérence de cette suite car $x_{2n} \longrightarrow 1$. De même, -1 est une valeur d'adhérence de cette suite car $x_{2n+1} \longrightarrow -1$. ◆

Proposition 3.0.5 *Si $x_n \longrightarrow x$, alors x est la seule valeur d'adhérence de la suite (x_n). En particulier la limite d'une suite convergente est unique.*

Preuve : x est une valeur d'adhérence, car la suite extraite (x_n) convrege vers x. Soit y une valeur d'adhérence de (x_n). Il existe une sous-suire (x_{n_k}) telle que $x_{n_k} \longrightarrow y$. Par ailleurs, on a aussi $x_{n_k} \longrightarrow x$. On suppose par l'absurde $y \neq x$. alors $d(x, y) > 0$. Posons $\varepsilon = d(x, y)/2 > 0$. Comme $x_{n_k} \longrightarrow x$, il existe un k_1 tel que $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$ si $k > k_1$. De même, il existe un k_2 tel que $d(x_{n_k}, y) < \varepsilon$ si $k \geq k_2$. Alors, pour $k = \max\{k_1, k_2\}$, on a $d(x, y) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y) < 2\varepsilon = d(x, y)$, ce qui est absurde. ◆

Définition 3.0.6 *Une suite (x_n) de X est de Cauchy si et seulement si*

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0\ :\ d(x_n, x_m) < \varepsilon \ \text{ dès que }\ n, m \geq n_0.}$$

Il est aisé de voir que toute suite convergente est de Cauchy. L'inverse n'est pas forcément vérifié. Puisqu'il existe des suite de cauchy qui ne convergent pas, à savoir :

Exemple 3.0.5 Dans $X\ =]-1, +1[$, la suite $\left\{1 - \dfrac{1}{n}\right\}_n$ est de Cauchy puisque la même suite converge vers 1 dans $\mathbb{R}$, mais $1 \notin X$. ◆

Exemple 3.0.6 Dans $\mathbb{Q}$ muni de la distance usuelle dans $\mathbb{R}$, la suite (x_n) définie par $x_n = E(2^n\sqrt{2})/2^n$ est de Cauchy, mais ne converge pas. En effet, on a $(2^n\sqrt{2} - 1)/2^n < x_n \leq \sqrt{2}$, d'où $x_n \longrightarrow \sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$. Donc (x_n) est une suite de Cauchy. Par ailleurs, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. L'unicité de la limite implique que (x_n) ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. ◆

Proposition 3.0.7 *Une suite de Cauchy est bornée.*

Preuve : Fixons $a \in X$. Il existe un n_0 tel que $d(x_n, x_m) < 1$ si $n, m \geq n_0$. Si $n \geq n_0$, on trouve

$$d(a, x_n) \leq d(a, x_{n_0}) + d(x_n, x_{n_0}) \leq d(a, x_{n_0}) + 1.$$

Finalement, $d(a, x_n) \leq r$, $\forall n$, où $r = \max\{d(a, x_0), ..., d(a, x_{n_0} - 1), d(a, x_{n_0}) + 1\}$. ◆

À nouveau, la réciproque est fausse :

Exemple 3.0.7 Dans $\mathbb{R}$, la suite de terme général $x_n = (-1)^n$, est bornée, mais pas de Cauchy. En effet, $d(0, x_n) \leq 1$, $\forall n$. Comme 1 et -1 sont des valeurs d'adhérence de (x_n), cette suite n'est pas de Cauchy. ◆

Définition 3.0.8 *L'espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans X converge dans X.*

Un espace normé complet est dit **espace de Banach**. L'intérêt évident de cette notion réside dans le fait que, dans un tel espace, pour montrer qu'une suite est convergente, il suffit d'établir qu'elle vérifie la propriété de Cauchy, ce qui ne suppose pas que l'on connaisse la limite.

Exemple 3.0.8 L'espace $\mathbb{R}$ muni de la norme usuelle est complet.

Exemple 3.0.9 Soient (X_i, d_i), $i = 1, \cdots, n$ des espaces complets. Alors $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ muni de la distance produit $d_\infty = (d_1, \cdots, d_n)$ est un espace complet. En particulier, l'espace produit $\mathbb{R}^n$ l'est aussi pour la norme produit.

Exemple 3.0.10 L'espace $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $|| \ ||_1$ n'est pas complet. Pour le voir, il suffit remarquer que la suite des fonctions continues

$$f_n(t) = \begin{cases} 2^n t^n & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ 1 & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

est de Cauchy car

$$\|f_n - f_m\| = \int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)| \, dt = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}\right|.$$

Si f_n convergeait, sa limite $f(t)$ devrait être nulle dans l'intervalle $[0, 1/2[$ et égale à 1 dans l'intervalle $[1/2, 1]$. ◆

Définition 3.0.9 *Soient (X, d_X) et (E, d_E) deux espaces métriques. On dit que l'application $f : X \longrightarrow Y$ est bornée si son image $f(X)$ est bornée.*

Notons par

$$\boxed{C_b(X, E) = \{f : X \longrightarrow E; \quad f \text{ continue et bornée}\}.}$$

Si f et $g \in C_b(X, E)$, on défini un distance par $d_\infty(f, g) = \sup\limits_{x \in X}\{d(f(x), g(x))\}$.

Proposition 3.0.10 *L'espace $(C_b(X, E), d_\infty)$ est un espace métrique complet si (E, d_E) est complet.*

Preuve : Si $\{f_n\}$ est une suite de Cauchy dans $C_b(X, E)$, alors, pour tout $x \in X$, $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans Y. On pose $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $d_\infty(f_n(x), f_m(x)) \le \varepsilon/2$ pour $m, n \ge n_0$. Pour tout $x \in X$, on a $d_E(f_n(x), f(x)) \le \varepsilon/2$ si $n \ge n_0$; ceci s'obtient en faisant tendre m à l'infini et en utilisant la continuité de la distance $y \longrightarrow d_E(a, y)$. Donc $d_\infty(f_n, f) < \varepsilon$, $n \ge n_0$. Il s'en suit que $d_\infty(f_n, f) \longrightarrow 0$ et la suite (f_n) converge uniformément vers f donc f est continue. Posons $\varepsilon = 1$, il existe $a \in E$ et $r > 0$ tels que $d_E(a, f_{n_0}(x)) \le r$, $x \in X$. On a alors

$$d_E(a, f(x)) \le d_E(a, f_{n_0}(x)) + d_E(f_{n_0}(x), f(x)) \le r + 1.$$

Ainsi $f \in C_b(X, E)$. ◆

Définition 3.0.11 *On dit qu'un espace vectoriel normé est un* **espace de Banach** *s'il est complet pour la distance associée à la norme.*

Exemple 3.0.11 Les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des espaces de Banach pour les normes equivalentes définit précédement. ◆

Exemple 3.0.12 Etant donné un ensemble non vide X, on note par $\ell_\infty(X, \mathbb{R})$ l'espace des foncions bornées de X dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in \ell_\infty(X, \mathbb{R})$, on définit la norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$. L'espace $(\ell_\infty(X, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach. ◆

Proposition 3.0.12 *Si (X, d) est un espace métrique et $(E, \|.\|_E)$ un espace normé. L'espace $(C_b(X, E), d_\infty)$ est un espace de Banach si $(E, \|.\|_E)$ est de Banach.*

Preuve : Il suffit de vérifier que $C_b(X, E)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Or, si $f, g \in C_b(X, E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, il existe r_1 et r_2 tel que $\|f(x)\|_E \leq r_1$ et $\|g(x)\|_E \leq r_2$ donc

$$\|(\lambda f + \mu g)(x)\|_E \leq |\lambda| r_1 + |\mu| r_2, \quad x \in X.$$

Soit que $\lambda f + \mu g \in C_b(X, E)$. ◆

Proposition 3.0.13 *Soient (X, d) un espace métrique et $A \subset X$.*

① *Si (A, d) est complet, alors A est un fermé de X.*

② *Si (X, d) est complet et A est un fermé de X, alors (A, d) est complet.*

Preuve :

① Soient (x_n) une suite de A et $a \in X$ tels que $x_n \longrightarrow a$. Alors (x_n) est une suite de Cauchy, donc convergente (dans A) vers un $b \in A$. L'unicité de la limite (dans X) implique $a = b \in A$. Il s'ensuit que $\overline{A} \subset A$, d'où A fermé.

② Soit (x_n) une suite de Cauchy dans A. Alors il existe un $a \in X$ tel que $x_n \longrightarrow a$. Il s'ensuit que $a \in A$, et donc (x_n) converge dans A. ◆

Corollaire 3.0.14 *Dans un espace métrique complet :*

$$\boxed{A \text{ complet} \iff A \text{ fermé.}}$$

Proposition **3.0.15** *Soit (X,d) un espace métrique. Si toutes les parties fermées et bornées de X sont complètes, alors X est complet.*

Preuve : Soit (x_n) une suite de Cauchy dans X. Alors (x_n) est bornée, et donc $(x_n) \subset B(a,r)$ pour $a \in X$ et un $r > 0$. $\overline{B(a,r)}$ étant un fermé borné, lors (x_n) converge dans $\overline{B(a,r)}$, et donc dans X. ◆

Exemple **3.0.13** Soit K un espace compact. L'espace $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ des fonctions continues sur K à valeurs réelles est un espace de Banach pour la norme $\|\ .\|_\infty$. ◆

Proposition **3.0.16** Soit $A \subset (X,d)$. Si (A,d_A) est complet, alors A est un fermé de X. Si (X,d) est complet et A est un fermé de X, alors (A,d_A) est complet.

Exemple **3.0.14** Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note

$$\begin{aligned} c_0(\mathbb{K}) &= \{x = (x_n)_n : \forall n, x_n \in \mathbb{K} \ \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_n = 0\} \\ \ell_\infty(\mathbb{K}) &= \{x = (x_n)_n : \forall n, x_n \in \mathbb{K} \ \text{ et } \ (x_n)_n \text{ borné}\}. \end{aligned}$$

On pose $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$. L'espace $(\ell_\infty(\mathbb{K}), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach. L'espace $c_0(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\ell_\infty(\mathbb{K})$, donc c'est un espace de Banach.
Montrons que $\ell_\infty(\mathbb{K})$ est complet : Soit $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\ell_\infty(\mathbb{K})$; c'est en fait une suite de suites. Pour chaque p, on a une suite bornée $x_p = (x_{p,0}, x_{p,1}, \cdots, x_{p,n}, \cdots)$ dont la norme est $\|x_p\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_{p,n}|$. Pour chaque n, la suite $p \longrightarrow x_{p,n}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{K}$, comme $\mathbb{K}$ est complet, elle converge; soit $k_n = \lim_{p\to\infty} x_{p,n}$. Il vient que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall n \in \mathbb{N} \ \ |x_{p,n} - k_n| \leq \varepsilon.$$

Considérons, maintenant, la suite $k = (k_n)_n$. Elle est bornée, car

$$|k_n| \leq |x_{N,n}| + |k_n - x_{N,n}| \leq \|x_N\|_\infty + \varepsilon$$

et d'après ce qui précède, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_{p,n} - k_n| \leq \varepsilon$$

soit que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \quad \|x_p - \lambda|_\infty \leq \varepsilon.$$

Ce qui prouve que $((x_p)_p)$ converge vers k dans $\ell_\infty(\mathbb{K})$. ◆

Chapitre 4

Espaces topologiques

Il y a des espaces fonctionnels, i.e. les éléments sont des fonctions, qui n'ont pas une structure d'espace métrique, mais dans lesquels on parle de voisinage, continuité, convergence etc.
Pour dégager ces notions générales, F. Hausdorff, mathématicien allemand, 1868-1942, a défini en 1914 les espaces topologiques à partir des voisinages. On va considérer la définition équivalente fondée sur la notion d'ensemble ouvert.

4.1 Notions de Topologie

Définition 4.1.1 *On appelle topologie sur un ensemble X, une famille $\mathcal{T}_X \subset \mathcal{P}(X)$ de parties de X appelées ouverts de X, vérifiant les axiomes suivants :*

① $\emptyset$ et $X \in \mathcal{T}_X$

② *Si $(O_i)_{i\in\mathbb{I}}$ est une famille quelconque de $\mathcal{T}_X$, alors $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{I}} O_i \in \mathcal{T}_X$. Donc $\mathcal{T}_X$ est stable par réunion quelconque d'ouverts.*

③ *Si $(O_i)_{i\in\overline{1,n}}$ est une famille finie de $\mathcal{T}_X$, alors $\bigcup\limits_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{T}_X$. Donc $\mathcal{T}_X$ est stable par intersection finie d'ouverts.*

Exemple 4.1.1 (Topologie grossière). La famille de parties d'un ensemble E, donnée par $\mathcal{T}_X = \{\emptyset, X\}$, est une topologie sur X appelée topologie grossière. C'est la topologie qui comporte le moins d'ouverts, ou la **topologie la moins fine** sur X.

Exemple 4.1.2 (Topologie discrète). La famille $\mathcal{T}_X = \mathcal{P}(X)$ de toutes les parties de X est une topologie sur X appelée la topologie discrète. C'est la topologie qui a le plus d'ouverts ou la **topologie la plus fine** sur E.

Si $\mathcal{O}$ est une famille de parties d'un ensemble X, et $A \subset X$, on note $\mathcal{O}_A = \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}\}$. On constate que $\mathcal{O}_A$ est une classe de parties de A.

Soit $(X, \mathcal{T}_X)$ un espace topologique et A une partie de X. Alors, la famille $\mathcal{T}_A$ de parties de A, est une topologie sur A. L'espace topologique $(A, \mathcal{T}_A)$ sera dit sous-espace topologique de l'espace topologique $(X, \mathcal{T}_X)$. La topologie $\mathcal{T}_A$ sur A sera dite **topologie induite** sur A par celle de X, ou encore la trace sur A de la topologie de X.

Définition 4.1.2 (Espace topologique séparé) *Un espace topologique $(X, \mathcal{T}_X)$ est dit séparé s'il vérifie la propriété suivante appelée axiome de Hausdorff :*
Pour tout couple $(x, y) \in E^2$ avec $x \neq y$ il existe $V_1 \in \mathcal{V}_x$ et de $V_2 \in \mathcal{V}_y$ tels que $V1 \cap V_2 = \emptyset$. Autrement dit, deux points distincts de E possèdent deux voisinages disjoints.

Exemple 4.1.3 Tout espace métrique est séparé. ◆

Soit X un ensemble. Une topologie $\mathcal{T}_1$ sur X est moins fine qu'une topologie $\mathcal{T}_1$ sur X si $\mathcal{T}_1$ est contenue dans $\mathcal{T}_2$, et plus fine si $\mathcal{T}_1$ contient $\mathcal{T}_2$. rm

Exemple 4.1.4 La topologie grossière est la topologie la moins fine sur X, et la topologie discrète est la topologie la plus fine sur X. ◆

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{T}_1$ est plus fine que $\mathcal{T}_2$; **2.** tout fermé pour $\mathcal{T}_2$ est fermé pour $\mathcal{T}_1$; **3.** l'application identique $(X, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ est continue; **4.** pour tout x de X, tout voisinage de x pour $\mathcal{T}_2$ est voisinage de x pour $\mathcal{T}_1$.

4.2 Voisinages, systèmes fondamentaux de voisinages

Soit X un espace topologique. Un **voisinage** d'une partie A de X est une partie de X contenant un ouvert contenant A. On appelle voisinage d'un point x de X un voisinage de $\{x\}$.

Une partie A de X est **ouverte** si et seulement si elle est voisinage de chacun de ses points, car elle est alors égale à la réunion des ouverts qu'elle contient.

Si $\mathcal{V}_x$ est l'ensemble des voisinages de x, alors :

- Toute partie de X contenant un élément de $\mathcal{V}_x$ appartient à $\mathcal{V}_x$.
- Toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{V}_x$ appartient à $\mathcal{V}_x$.

Définition 4.2.1 *Un* **système fondamental de voisinages** *d'un point x d'un espace topologique X est une partie $\mathcal{B}_x$ de $\mathcal{V}_x$ telle que tout voisinage de x contient un élément de $\mathcal{B}_x$.*

Pour toute suite de réels strictement positifs $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0, si (X, d) est un espace métrique, alors $\{B(x, r_n) : n \in \mathbb{N}\}$ est un système fondamental de voisinages de x.

Si $f : X \longrightarrow Y$ est un homéomorphisme et $x \in X$, alors $f(\mathcal{V}_x) = \mathcal{V}_{f(x)}$, et l'image par f d'un système fondamental de voisinages de x est un système fondamental de voisinages de $f(x)$.

Soit X un espace topologique et A une partie de X :
L'**intérieur** de A est l'ensemble, noté $A°$, des points de A dont A est un voisinage. L'**adhérence** de A est l'ensemble, noté $\overline{A}$, des points de X dont tout voisinage rencontre A. La **frontière** de A est l'ensemble, noté $Fr(A)$, des points de X adhérents à A et à son complémentaire. Une partie de X est **dense** dans X si son adhérence est X, et **nulle part dense** si l'intérieur de son adhérence est vide.

4.3 Continuité et homéomorphisme

Définition 4.3.1 *Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(X', \mathcal{T}_{X'})$ deux espaces topologiques. L'application f de X dans X' est dite* **continue** *au point $a \in X$ si l'image réciproque par f de tout voisinage de $f(a)$ est un voisinage de a. Elle est dite continue si elle l'est en tout point de X. Elle est dite* **homéomorphisme** *si f est continue, bijective et l'application réciproque f^{-1} est continue.*

Définition 4.3.2 *Soit $(X, \mathcal{T}_X)$ un espace topologique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E :*

① *La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite convergente s'il existe un élément $\ell \in E$ tel que, pour tout voisinage V de ℓ, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $n > n_0$ alors $x_n \in V$. L'élément ℓ sera dit limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

② *L'élément $a \in E$ sera dit* **valeur d'adhérence** *de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$), si pour tout voisinage V de a, l'ensemble $\{n \in N | x_n \in V\}$ est infini.*

A noter que toute limite d'une suite est une valeur d'adhérence, et la réciproque est fausse. A noter également que toute limite d'une suite extraite de la suite (x_n), est une valeur d'adhérence de la suite (x_n).

Proposition 4.3.3 (Caractérisation de la continuité) *Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(X', \mathcal{T}_{X'})$ deux espaces topologiques, et f une application de X dans EX'. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

① f *est continue.*

② *Pour toute partie* A *de* X *on a* $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

③ *L'image réciproque par* f *de tout fermé de* X' *est un fermé de* X.

④ *L'image réciproque par* f *de tout ouvert de* X' *est un ouvert de* X.

Preuve : Voir exercice

Exemple 4.3.1 Toute application d'un espace topologique X muni de la topologie discrète, dans un espace topologique Y est continue. Toute application d'un espace topologique X dans un espace topologique Y muni de la topologie grossière est continue. ◆

Chapitre 5

Exercices : Espaces métriques

5.1 Énoncés

Exercice 1.1.☞

Soit (E, d) un espace métrique, F un ensemble quelconque et φ une bijection de E sur F. Montrer que l'application δ définie sur $F \times F$ par : $\forall(x, y) \in F \times F,\ \delta(x, y) = d(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y))$ est une distance. ◆

Exercice 1.2.☞

On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble formé par la réunion de $\mathbb{R}$ et les éléments $+\infty$ et $-\infty$. On note γ l'application de $\overline{\mathbb{R}}$ sur $[-1, +1]$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \gamma(x) = \frac{x}{1 + |x|} \quad \text{et} \quad \gamma(+\infty) = +1,\ \gamma(-\infty) = -1.$$

Assurer que γ est une bijection de $\overline{\mathbb{R}}$ sur $[-1, +1]$. En déduire que l'application définie sur $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ par : $\forall(x, y) \in \overline{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}},\quad d(x, y) = |\gamma(x) - \gamma(y)|$ est une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$. L'espace métrique ainsi défini $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ est dit **droite achevée**. ◆

Exercice 1.3.☞

Soit (E, d) un espace métrique, $x \in E$ et $y \in E$ avec $x \neq y$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$. ◆

Exercice 1.4.☞

Soient (E, d) un espace métrique etx_0 un point de E. Montrer :

① Pour tout $V \in \mathcal{V}(x_0)$, on a $x_0 \in V$.

② Si $V \in \mathcal{V}(x_0)$, tout W tel que $V \subset W$ appartient à $\mathcal{V}(x_0)$.

② $V_1 \in \mathcal{V}(x_0)$ et $V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$ alors $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$. ◆

Exercice 1.5.☞

Soit (E, d) un espace métrique et $F \subset E$. On pose pour $x \in E$: $d(x, F) = \inf_{z \in F} d(x, z)$.

① Montrer que $|d(x, F) - d(y, F)| \leq d(x, y)$ si x et $y \in E$.

② En déduire que la fonction $f(x) = d(x, F)$ est continue et :

$$F = f^{-1}(\{0\}) \Longleftrightarrow F \text{ est fermé dans } (E, d).$$

③ On suppose F fermé et $x_0 \notin F$. A l'aide de f, définir deux ouverts U et V tels que $x_0 \in U$, $F \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$ (les ouverts U et V séparent $\{x_0\}$ et F). ◆

Exercice 1.6.☞

Soit A un ensemble non vide. On dit qu'une fonction f de A dans $\mathbb{C}$ est bornée s'il existe un réel M, qui dépend de f, tel que, pour chaque $x \in A$, on a $|f(x)| \leq M$. On note $\ell^\infty(A, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions bornées de A dans $\mathbb{C}$. Pour $f, g \in \ell^\infty(A, \mathbb{C})$ on pose

$$d(f, g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|.$$

① Montrer que d est une distance sur $\ell^\infty(A, \mathbb{C})$.

Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de $\ell^\infty(A, \mathbb{C})$ relativement à cette métrique d.

② Montrer : $\exists C \in \mathbb{R}$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $x \in A$, on a $|f_n(x)| \leq C$.

③ Fixons $a \in A$. Montrer que la suite $(f_n(a))_n$ est convergente dans $\mathbb{C}$.

Pour chaque $a \in A$ on pose $f(a) = \lim_n f_n(a)$. On définit une fonction de A dans $\mathbb{C}$.

④ Montrer que $f \in \ell^\infty(A, \mathbb{C})$.

⑤ Montrer que $\lim_{n \to +\infty} d(f_n, f) = 0$. Que peut-on dire de l'espace métrique $(\ell^\infty(A, \mathbb{C}), d)$? ◆

Exercice 1.7.☞

Soit (E, d) un espace métrique et E^2 l'espace métrique produit. La **diagonale** de E^2 est l'ensemble

$$\Delta = \{(x, x) \in E^2 : x \in E\}.$$

Montrer que Δ est un fermé de E^2.

Exercice 1.8.☞

Soient (E_1, d_1), (E_2, d_2) deux espaces métriques. Soit $E = E_1 \times E_2$ le produit cartésien de E_1 et de E_2. Pour $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2) \in E$ on pose

$$d(x, y) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)).$$

On note π_1 et π_2 les applications de E dans E_1 et dans E_2 définies respectivement par $\pi_1(a, b) = a$ et $\pi_2(a, b) = b$.

① Vérifier que d est une distance.

② Vérifier que π_1 est continue. Qu'en est-il de π_2 ?

③ Montrer que l'image par π_1 de tout ouvert de E est un ouvert de E_1.

④ Montrer sur un exemple que l'image par π_1 d'un fermé de E n'est pas nécessairement un fermé de E_1.

⑤ Soit f une application de E_1 dans E_2. Son graphe est le sous-ensemble

$$G_(f) = \{(a, f(a)) \in E_1 \times E_2; a \in E_1\} \subset E_1 \times E_2.$$

Montrer que si f est continue alors son graphe est fermé dans $E_1 \times E_2$.

Exercice 1.9.☞

Soit $d : \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, définie par : $\forall x > 0,\ y > 0,\ \ d(x, y) = \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right|.$

① Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}_*^+$.

② Définir une boule de centre 1 et de rayon r.

③ On pose $x_n = \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. La suite (x_n) est-elle de Cauchy pour cette distance ?

Exercice 1.10.☞

Soient A et B deux parties quelconque d'un même espace vectoriel (E, d)

① Pour tout ouvert O tel que $O \subset A \cap B$, démontrer que $O \subset A^\circ \cap B^\circ$.

② En déduire que $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

③ Établir que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

④ Établir l'inclusion $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^0$. Montrer qu'elle peut être stricte.

④ Établir l'inclusion $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Montrer qu'elle peut être stricte.

Exercice 1.11.☞

① Dans $\mathbb{R}^n$, montrer qu'un ouvert n'a pas de point isolé.

② Dans $\mathbb{R}$, on sait que $\mathbb{Q}$ n'est pas ouvert; est-il fermé ? Est-ce que $\mathbb{Q}$ a des points isolés ?

③ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'ensemble $F_n = \left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}; p \in \mathbb{Z}, q \in^* : q \leq n\right\}$. Montrer que F_n est un fermé de $\mathbb{R}$ et que ses points sont isolés.

Exercice 1.13.☞

Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, considérons la partie

$$X =]-\infty, -1[\bigcup \left\{0, \frac{\pi}{4}, \sqrt{3}\right\} \bigcup \left\{3 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

① Déterminer $\overset{\circ}{X}$, $\overline{X}$ et $\mathrm{Fr}(X)$.

② Déterminer les points d'accumulation de X.

③ Quels sont ses points isolés ?.

Exercice 1.14.☞

Soit la suite réelle de terme général $u_n = 2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + (-1)^n\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ et $U = \{u_n \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des valeurs de la suite (u_n).

① Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite (u_n).

② Donner l'adhérence de l'ensemble U.

Exercice 1.15.☞

Soient d la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ et d_1 l'application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $d(x, y) = |e^y - e^x|$.

① Montrer que d_1 est une distance sur $\mathbb{R}$.

② d_1 est-elle bornée ?

③ Décrire la boule ouverte $B(0,1)$ relativement à d_1.

④ Montrer que d_1 et d sont topologiquement équivalentes.

⑤ Soit $u = (u_n)_n$ la suite telle que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -n$. La suite u est-elle de Cauchy relativement à d_1 ?

⑥ Est-elle convergente ? Conclure.

Exercice 1.16.☞

Soit f une fonction d'un espace topologique (E, T) dans un espace topologique (F, U). Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

① f est continue,

② pour chaque sous-ensemble B de F, $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$,

③ pour chaque sous-ensemble B de F, $f^{-1}(B^\circ) \subset [f^{-1}(B)]^\circ$.

Problème corrigé

Dans tout ce problème, on fixe un entier $n \neq 1$ et une partie A de $\mathbb{R}^n$, muni de la distance euclidienne. On rappelle que $\overline{A}$ désigne l'intersection de tous les fermés de $\mathbb{R}^n$ contenant A. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on dit que x est adhérent à A si, et seulement si, pour toute boule ouverte B de $\mathbb{R}^n$ contenant x, $B \setminus A \neq \emptyset$. On notera adh$(A)$ l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ adhérents à A. Le but de ce problème est de montrer que $\overline{A} =$ adh(A).

Partie 1 :

Dans cette partie, on prouve que $\overline{A} \subset$ adh(A).

① Vérifier que $A \subset$ adh(A).

② Expliquer pourquoi, pour prouver l'inclusion $\overline{A} \subset$ adh(A), il suffit de montrer que adh(A) est fermé.
Dans la suite de ce problème, on notera $C = \mathbb{R}^n \setminus$ adh(A).

③ Soit $x \in C$. Justifier qu'il existe une boule ouverte B de centre x incluse dans C. En déduire que C est ouvert. Conclure.

Partie 2 :

Dans cette partie, on prouve que adh$(A) \subset \overline{A}$.
Expliquer pourquoi, pour prouver l'inclusion adh$(A) \subset \overline{A}$, il suffit de montrer que, pour tout fermé F contenant A, adh$(A) \subset F$. Soit F un fermé contenant A. On note $O = \mathbb{R}^n \setminus F$.

① Vérifier que $O \setminus A = \emptyset$.

② En déduire que $O \subset C$ (on rappelle que $C = \mathbb{R}^n$ adh(A)). Conclure.

5.2 Correction des Exercices

C 1.4

① Pour tout $V \in \mathcal{V}(x_0)$, $\exists r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset V$ donc $x_0 \in V$.

② Pour tout $V \in \mathcal{V}(x_0)$, $\exists r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset V \subset W$ donc $W \subset \mathcal{V}(x_0)$.

③ $V_1 \in \mathcal{V}(x_0)$ et $V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$, $\exists r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ tel que alors $B(x_0, r_1) \subset V_1$ et $B(x_0, r_2) \subset V_2$. Posons $r = \min(r_1, r_2)$, alors $B(x_0, r) \subset V_1 \cap V_2$ donc $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$.

C 1.5

① Soient x et $y \in E$. Grâce à l'inégalité triangulaire on a :

$$d(x, F) = \inf z \in F d(x, z) \leq \inf z \in F(d(x, y) + d(y, z)) = d(x, y) + d(y, F)$$

soit $d(x, F) \leq d(x, y) + d(y, F)$. De même, en échangeant x et de y, on a

$$d(y, F) \leq d(x, y) + d(x, F)$$

ce qui donne l'encadrement

$$-d(x, y) \leq d(x, F) - d(y, F) \leq d(x, y)()|d(x, F) - d(y, F)| \leq d(x, y).$$

② La fonction $f(x) = d(x, F)$ est continue :

$$\forall \varepsilon > 0, d(x, y) < \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq d(x, y) < \varepsilon.$$

Si $F = f^{-1}(0)$ alors F est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ de $(\mathbb{R}, U_s)$ par f continue. Réciproquement, si F est fermé et $f(x) = d(x, F) = 0$, il existe alors une suite $y_n \in F$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} d(x, y_n) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n \to +\infty} y_n = x \Longrightarrow x \in F.$$

③ Soit F un fermé de (E, d) et $x_0 \notin F$. Alors, toujours en posant $f(x) = d(x, F)$, on a d'après 2) : f continue, $F = f - 1(0$ et donc $f(x_0) > 0$. Les ouverts $U = f^{-1}(]f(x_0)/2, +\infty[)$ et $V = f^{-1}(] - \infty, f(x_0)/2[)$ sont tels que $x_0 \in U$, $F \subset V$ et $U \setminus V = \emptyset$ (les ouverts U et V séparent $\{x_0\}$ et F).

C 1.6

① Il n'y a aucune difficulté pour vérifier que d est une métrique sur $\ell^\infty(A, \mathbb{C})$.

② Puisque la suite $(f_n)_n$ est de Cauchy il existe un entier N tel que, pour $n, m \geq N$, on a $d(f_n, f_m) = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| \leq 1$. On a, en particulier, pour chaque entier $n \geq N$, $\sup_{x \in A} |f_n(x) - f_N(x)| \leq 1$ donc, pour chaque $x \in A$ et chaque entier $n \geq N$, $|f_n(x)| \leq |f_N(x)| + 1$. Soit $M_N = \sup_{a \in A} |f_N(a)|$. Nous avons, pour chaque entier $n \geq N$ et chaque $x \in A$, $|f_n(x)| \leq M_{N+1}$. Notons, pour $k = 1, 2, ..., N - 1$, $M_k = \sup_{a \in A} |f_k(a)|$. Pour chaque $x \in A$ et chaque entier m on a

$$|f_m(x)| \leq \max(M_1, M_2, ..., M_{N-1}, M_{N+1}).$$

Le nombre $C = \max(M_1, M_2, ..., M_{N-1}, M_{N+1})$ possède les propriétés demandées.

③ Fixons $a \in A$. Pour deux entiers n et m quelconques on a

$$|f_n(a) - f_m(a)| \leq d(f_n, f_m);$$

il s'ensuit que la suite $(f_n(a))_n$ est de Cauchy donc convergente dans $\mathbb{C}$.

④ Soit a un élément arbitraire de A. Nous savons que, pour chaque entier n, on a $|f_n(a)| \leq C$; la conservation des inégalités par passage à la limite entraîne $|f(a)| \leq C$. Puisque a est quelconque dans A il en découle que $f \in \ell^\infty(A, \mathbb{C})$.

⑤ Donnons-nous un réel $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N tel que, pour chaque $N \leq n \leq m$ et chaque $a \in A$, on a

$$|f_n(a) - f_m(a)| \leq d(f_n, f_m) \leq \varepsilon.$$

Fixons $a \in A$ et $n \geq N$; en faisant tendre m vers $+1$ et en utilisant la conservation des inégalités par passage à la limite nous obtenons $|f_n(a) - f_(a)| \leq \varepsilon$. L'élément $a \in A$ étant arbitraire nous avons alors établi que, pour chaque entier $n \geq N, d(fn, f) \leq \varepsilon$. On a donc bien $\lim\limits_{n\to+\infty} d(f_n, f) = 0$. L'espace métrique $\ell^\infty(A, \mathbb{C})$ est donc complet.

C 1.8

① Routine

② On observe que pour $(a, b), (a', b') \in E_1 \times E_2$ on a

$$d_1(\pi_1(a, b), \pi_1(a', b')) = d_1(a, a') \leq d((a, b), (a', b'))$$

d'où il découle immédiatement la continuité uniforme de π_1. Le même argument montre la continuité uniforme de π_2.

③ Soit O un ouvert non vide de $E_1 \times E_2$. Nous allons montrer que $A = \pi_1(O)$ est un ouvert de E_1. Soit $a \in A$, montrons qu'il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$. Puisque $a \in A$, il existe $b \in E_2$ tel que $(a, b) \in O$ et $\pi_1(a, b) = a$. O étant un ouvert de $E_1 \times E_2$ il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a, r) \times B(b, r) \subset O$. On a évidemment

$$\pi_1(B(a, r) \times B(b, r)) = B(a, r) \subset \pi_1(O) = A.$$

④ Considérons dans $\mathbb{R}^2$ le sous-ensemble

$$H = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right); x \neq 0\right\}.$$

Vérifions que H est un fermé. Soit $(a, b) \in \overline{H}$. Nous pouvons trouver une suite $(h_n)_n$ de points de H qui converge vers (a, b). Pour chaque entier n nous pouvons écrire $h_n = \left(x_n, \dfrac{1}{x_n}\right)$ avec $x_n \neq 0$. On a $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ et $b = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n}$. La suite $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)_n$ ayant une limite finie, la suite $(x_n)_n$ a une limite différentede 0. Il s'ensuit que $b = \dfrac{1}{a}$ donc $(a, b) \in H$. Il est facile de vérifier que $\pi_1(H) = \pi_2(H) = \mathbb{R}\ 0$ qui n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.

⑤ Soit $(a,b)\in\mathcal{C}_f$. Il existe une suite $(a_n)_n$ de E_1 telle que $(a,b)=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n,f(a_n))$. La continuité des projections π_1 et π_1 entraîne $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ et $b=\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)$. La fonction f étant continue au point a on a $f(a)=\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)$ donc $b=f(a)$ et $(a,b)\in\mathcal{C}_f$.

C 1.9

① Les axiomes d'une distance se vérifient facilement.

② Pour les boules, on a :

$$y\in B(1,r)\Longleftrightarrow\left|\frac{1}{y}-1\right|<r\longleftrightarrow -ry<1-y<ry.$$

Si $r\geq 1$, on a $B(1,r)=\left]\frac{1}{r+1},+\infty\right[$ et si $r<1$, on a $B(1,r)=\left]\frac{1}{r+1},\frac{1}{1-r}\right[$. Pour les boules fermés, on obtient les intervalles fermés correspondants.

③ C'est une suite de Cauchy, car pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a

$$d(x_n,x_{n+k})=\frac{\sqrt{n+k}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+k}}<\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Or, il n'existe pas de nombre $\ell>0$, tel que $d(x_n,\ell)\longrightarrow 0$ lorsque n tend vers l'infini. Donc, $E=]0,+\infty[$ n'est pas complet pour cette distance. ◆

C 1.10

① Soit $0\subset A\cap B$. Alors $x\in O\subset A$ et $x\in O\subset B$. Donc $x\in\overset{\circ}{A}$ et $x\in\overset{\circ}{B}$ soit que $x\in\overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}$ et alors $O\subset\overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}$.En particulier, si l'on pose $O=(A\cap B)^o$, il vient que $(A\cap B)^o\subset\overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}$. D'autre part, $\overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}$ est un ouvert contenu dans $A\cap B$ donc $\overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}\subset(A\cap B)^o$. D'oùl'égalité cherchée.

② De l'égalitée précédente, remplaçons A et B par leurs complémentaires, on obtiendra l'égalité cherchée.

③ L'ouvert $\overset{\circ}{A}\cup\overset{\circ}{B}$ est inclu dans $A\cup B$ donc inclu dans son intérieur : $\overset{\circ}{A}\cup\overset{\circ}{B}\subset(A\cup B)^o$. Dans $\mathbb{R}$, si $A=[0,1[$, $B=[1,2]$, on a $\overset{\circ}{A}\cup\overset{\circ}{B}=]0,1[\cup]1,2[$ et $(A\cup B)^o=]0,2[$.

④ Le fermé $\overline{A}\cap\overline{B}$ contient $A\cap B$, donc contient aussi l'adhérence de cette intersection .... Dans $\mathbb{R}$, si $A=[0,3[$, $B=]3,5[$, on a $\overline{A}\cap\overline{B}=\{3\}$ et $\overline{A\cap B}=\emptyset$. ◆

C 1.11

① Soit O un ouvert et $a \in O$. Toute boule ouverte centrée en a contient une infinité de points de O. En effet, $B(a,r) \cap O$ est un ouvert contenant a; il existe $\eta > 0$ tel que $B(a,\eta) \subset B(a,r) \cap O$.

② L'ensemble $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il est distinct de son adhérence et n'est donc pas fermé (idem pour $\mathbb{Q}^c$, ce qui prouve que $\mathbb{Q}$ n'est pas ouvert). Si $a \in \mathbb{Q}$, toute boule ouverte centrée en a s'écrit $B(a,r) =]a-r, a+r[$, intervalle qui contient une infinité de nombres rationnels. L'ensemble $\mathbb{Q}$ n'a pas de point isolé. ◆

C 1.13

$\overset{\circ}{X} =]-\infty, -1[$, $\overline{X} = X \cup \{-1, 3\}$. La frontière de X est

$$Fr(X) = \overline{X} \setminus \overset{\circ}{X} = \left\{-1, 0, \frac{\pi}{4}, \sqrt{3}, 3\right\} \bigcup \left\{3 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}*\right\}.$$

L'ensemble des points d'accumulation de X est

$$X' =]-\infty, -1] \cup \{3\}.$$

L'ensemble des points isolés de X est :

$$\overline{X} \setminus X' = \left\{0, \frac{\pi}{4}, \sqrt{3}\right\} \bigcup \left\{3 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}*\right\} = X \setminus X'.$$

C 1.14

① Si n est un nombre entier, $\cos \dfrac{n\pi}{2} \in \{-1, 0, 1\}$ et de même pour $\sin \dfrac{n\pi}{2}$, ce qui nous amène à envisager n modulo 4. Il vient :

$$\lim_{k\to\infty} u_{4k} = 2, \quad \lim_{k\to\infty} u_{4k+1} = 1, \quad \lim_{k\to\infty} u_{4k+2} = 0, \quad \lim_{k\to\infty} u_{4k+3} = -3.$$

Les valeurs d'adhérence sont : $-3, 0, 1, 2$. Ce sont les points d'accumulation de l'ensemble U.

② $\overline{U} = U \cup \{-3, 0, 2\}$ car $u_0 = 1 \in U$. ◆

C 1.15

① Il est très facile de vérifier que d_1 est une distance sur $\mathbb{R}$.

② d_1 n'est pas bornée car pour chaque réel $M \geq 0$ on peut trouver deux éléments $x, y \in \mathbb{R}$ pour lesquels $d_1(x, y) \geq M$. M, étant donné, il suffit de prendre $x = 0$ et $y = \ell\mathrm{n}(M + 1)$.

③ Pour la métrique d_1 on a $B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}; |e^x - 1| < 1\} =]-\infty, \ell\mathrm{n}2[$.

④ Etablissons la continuité de $I_\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ muni de d dans $\mathbb{R}$ muni de d_1 en un point $a \in \mathbb{R}$. Donnons-nous un réel $\rho > 0$. La fonction exponentielle étant continue au point a il existe un réel $r > 0$ tel que, pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la condition $|a-x| < r$ entraîne $|e^a - e^x| = d_1(a, x) < \varepsilon$.
Établissons la continuité $I_\mathbb{R}$ de $(\mathbb{R}, d_1)$ dans $(\mathbb{R}, d)$ en un point α. Donnons-nous un réel $\rho > 0$. La fonction logarithme est continue au point e^α. Il existe un réel $\theta > 0$ tel que, pour chaque $\xi \in \mathbb{R}$ vérifiant $|\xi - e^\alpha| < \theta$, on a $|Log\xi - Log(e^\alpha)| = |Log\xi - \alpha| < \rho$. Pour chaque réel x vérifiant $d_1(x, \alpha) = |e^x - e^\alpha| < \theta$ on a alors

$$|Log(e^x) - Log(e^\alpha)| = |x - \alpha| < \rho.$$

Les deux métriques d et d_1 sont donc topologiquement équivalentes.

⑤ La suite u est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ muni de d_1 car la suite $(e^{-n})_n$ est convergente vers 0. En effet, un réel $\varepsilon > 0$ étant donné il existe un entier N tel que, pour $n, m \geq N$, on a $d_1(u_n, u_m) = |e^{-n} - e^{-m}| \leq \varepsilon$.

⑥ La suite u ne converge pas dans $\mathbb{R}$ muni de d_1 sinon, les deux métriques d et d_1 étant équivalentes, elle convergerait aussi pour la métrique d, ce qui est impossible.

⑦ La notion d'espace métrique complet n'est pas une notion topologique dans le sens qu'elle n'est pas conservée par homéomorphisme.

C 1.16

Montrons que ① entraîne ② : Soit f une application continue de E dans F. Considérons un sous-ensemble B de F. Nous savons que $f^{-1}(\overline{B})$ est un fermé de E, comme image réciproque d'un fermé par une application continue, qui contient évidemment $f^{-1}(B)$ il s'ensuit que $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.
Montrons que ② entraîne ③ : Rappelons que pour chaque sous-ensemble X de F on a $f^{-1}(X^c) = [f^{-1}(X)]^c$. Soit A un sous-ensemble quelconque de F. Considérons $B = A^c$. En utilisant ② nous obtenons $\overline{f^{-1}(A^c)} \subset f^{-1}(\overline{A^c})$ ce qui implique

$$[f^{-1}(A)^o]^c = \overline{[f^{-1}(A)]^c} \subset f^{-1}(\overline{A^c}) = f^{-1}(A^{oc}) = [f^{-1}(A^o)]^c$$

d'où $f^{-1}(A^o) \subset f^{-1}(A)^o$ en prenant les complémentaires des deux membres.
Montrons que ③ entraîne ① : Il suffit de vérifier que l'image réciproque par f

d'un ouvert de F est un ouvert de E. Soit O un ouvert de F. Nous avons, en utilisant $\mathcal{O} = \mathcal{O}^o$ et ③ , $f^{-1}(\mathcal{O}) \subset [f^{-1}(\mathcal{O})]^o$ ce qui montre que $f^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert car il est égal à son intérieur.

Correction du Problème

Corrigé Partie 1 :

① Soit $x \in A$ et $B(x, r)$ une boule ouverte contenant x. Alors $x \in B(x, r) \cap A$, ce qui montre que $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, puis que $x \in \text{adh}(A)$.

② Par définition, $\overline{A}$ est le plus petit fermé (au sens de l'inclusion) contenant A. Si on montre que adh(A) est un fermé, comme adh(A) contient A, on obtiendra aussitôt l'inclusion $\overline{A} \subset \text{adh}(A)$.

③ On fixe $x \in C$. Comme x n'est pas adhérent à A, il existe une boule ouverte $B(x, r)$ contenant x telle que $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Si maintenant $y \in B(x, r)$, y n'est donc pas adhérent à A, puisqu'il appartient à une boule ouverte qui ne rencontre pas A. Cela montre que $B(x, r) \subset C$. Ainsi, pour tout $x \in C$, il existe une boule ouverte B contenant x et incluse dans C. Cela montre que C est ouvert.
Précision : on a montré que, pour tout $x \in C$, il existe une boule ouverte $B(x, r)$ de rayon $r > 0$ et de centre x_0 contenant x et incluse dans C. Cette boule n'est pas forcément centrée en x, mais la boule ouverte de centre x et de rayon $r - d(x, x_0) > 0$ est incluse dans $B(x, r)$, elle-même incluse dans C. Ainsi, pour tout $x \in C$, on peut trouver une boule ouverte de centre x et incluse dans C. Comme C est ouvert, son complémentaire adh(A) est fermé, ce qui termine donc la preuve de $\overline{A} \subset \text{adh}(A)$.

Corrigé Partie 2 :

On sait que, pour tout fermé F contenant A, adh$(A) \subset F$, on obtient que adh(A) est inclus dans l'intersection de tous les fermés contenant A, c'est-à-dire, par définition, dans $\overline{A}$.

① Si $x \in O \cap A$, on a à la fois $x \in A$ et $x \notin F$, ce qui est impossible car $A \subset F$.

② Soit maintenant $x \in O$. Comme O est ouvert (puisque F est fermé), il existe une boule ouverte $B(x, r)$ contenant x et incluse dans O. Par conséquent, $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Cela prouve que x n'est pas adhérent à A, ou encore que $x \in C$. On a donc bien prouvé que $O \subset C$.

② Si $x \notin F$, on a $x \in O$, donc $x \notin \text{adh}(A)$. Par contraposée, on voit que si $x \in \text{adh}(A)$, alors $x \in F$. On a donc établi l'inclusion adh$(A) \subset F$, ce qui termine la preuve de l'inclusion adh$(A) \subset \overline{A}$, et finalement de l'égalité $\overline{A} = \text{adh}(A)$. ◆

Chapitre 6

Théorème du point fixe et ses applications

Théorème 6.0.1 *Soit* $X, d)$ *un espace métrique complet et soit* $f : X \to X$ *une application* (**contraction**) *pour laquelle il existe* $k \in \mathbb{R}$, $0 < k < 1$ (**constante de contraction**)*, telle que*

$$d(f(x), f(y)) \leq kf(x, y) \qquad \forall x, y \in X.$$

Alors, il existe un point unique $a \in X$ *tel que* $f(a) = a$*. De plus, notons par* f^n *la* n*-ème composée de* f*, alors*

$$\boxed{a = \lim_{n \to \infty} f^n(x), \quad \forall x \in X}$$

Preuve : Si a et a' sont deux points fixes pour f, alors

$$d(a; a') = d(f(a), f(a')) \leq kd(a, a').$$

Ce qui est possible que si $d(a, a') = 0$ donc $a = a'$. D'où l'unicité du point fixe. La suite $(f^n(x))_n$ est une suite de Cauchy car, par itération, on a

$$d(f^{n+k}, f^n(x)) \leq d(f(x), x)\frac{k^n}{1-k},$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini car $0 < k < 1$. Cette suite converge vers un point noté a car (X, d) est complet. ◆

Exemple 6.0.1 *Trouver le nombre des solutions de l'équation* $\cos x = x$*. Posons* $f(x) = \cos x \in [-1, 1]$*. Posons* $X = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$*, fermé donc complet. Soit* $f : X \to X$*, alors* $|f'(x)| \leq k = \sin 1 \leq 1$*,* $x \in X$*. Le théorème des accroissements finis implique que* $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$*,* $x, y \in X$*. Il s'en suit que l'équation* $\cos x = x$ *admet une seule solution d'après le théorème du point fixe.* ◆

Théorème **6.0.2 (Valeurs intermédiaires).** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors f atteint toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$:*

$$\boxed{\forall c \in [f(a), f(b)],\ \exists x_0 \in [a,b]\ :\ f(x_0) = c.}$$

Une variante au théorème des valeurs intermédiaires, qui permet de résoudre certaines équations numériques, est donnée par :

Théorème **6.0.3** *Si la fonction f est continue sur $[a,b]$ et si $f(a).f(b) < 0$, il existe alors au moins un point un $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) = 0$.*

Si f est strictement monotone sur $[a,b]$, le point x_0 est unique.

Exemple **6.0.2** La fonction $f(x) = x^3 - 2x + 2$ est continue sur l'intervalle $[-2,1]$. Comme $f(-2).f(1) = -2 < 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine sur l'intervalle $[-2,1]$, à savoir, $x_0 = -1,76929$. La racine x_0 est l'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses. ◆

Exemple **6.0.3 (Méthodes de résolution d'une équation numérique).** Considérons une fonction monotone et continue sur $[a,b]$ telle que $f(a).f(b) < 0$. Il existe une solution unique x_0 de l'équation $f(x) = 0$ sur $[a,b]$. Pour estimer convenablement la racine x_0, plusieurs méthodes de résolution sont suggérées.

- **Méthode de dichotomie :** On choisit le milieu $\dfrac{a+b}{2}$ de l'intervalle $[a,b]$ et on calcule $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$. Si $f(a).f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) < 0$, la racine x_0 est à chercher dans l'intervalle $\left[a, f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right]$. Sinon $x_0 \in \left[f\left(\dfrac{a+b}{2}\right), b\right]$. L'intervalle où se trouve x_0 sera retenue et on repète la même opération jusqu'à ce que la précision soit suffisante.

- **Méthode du point fixe :** On exprime la fonction f sous la forme $f(x) = \varphi(x) - x$. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ revient à trouver le point fixe x_0 de l'équation $\varphi(x) = x$. Ceci est possible lorsque φ applique l'intervalle $[a,b]$ dans lui-même et s'il existe une certaine constante k telle que $|\varphi'(x)| \le k < 1$ pour tout $x \in [a,b]$. La suite $(x_n)_n$ déterminée par une valeur initiale choisie sur $[a,b]$ et par la relation de récurrence $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, converge vers la solution de l'équation x_0.

- **Méthode de Newton-Raphson :** Supposons qu'une valeur approchée x_1 de x_0 soit connue. L'abscisse x_2 de l'intersection de la tangente à la courbe Γ_f au point

$M_0(x_1, f(x_1)$, est une nouvelle valeur plus précise de x_0. En répétant ce procédé, on construit une suite $(x_n)_n$ qui converge vers x_0. Les termes de cette suite, comme on peut le constater sont donnés par la récurrence $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. ◆

Exemple 6.0.4 Soit $K : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue pour laquelle il existe $0 < k < 1$ tel que $|K(x,t)| \leq k$, pour tous $x, t \in [0,1]$ et $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On cherche une fonction continue $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie **l'équation de Fredholm** suivante :

$$\boxed{f(x) = \varphi(x) + \int_0^1 K(x,t) f(t) dt}$$

On se ramène facilement à la recherche d'un point fixe en définissant $T : \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ par

$$T(g)(x) = \varphi(x) + \int_0^1 K(x,t) g(t) dt$$

On vérifie, aussitôt que

- T applique $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ dans lui-même *i.e.* T est une transformation.
- T est une contraction si l'on muni $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ de la norme $\| \ \|_\infty$ de constante de constraction k.

Comme $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$ est un espace complet, le théorème du point fixe implique l'existence d'une $f \in (\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ telle que $T(f) = f$. ◆

Traitons, maintenant, les premières applications du Théorème du point fixe .

6.0.1 La méthode de Newton

Cette permet la recherche de racines de polynômes et plus généralement des fonctions $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Proposition 6.0.4 *Soit* $f : [x_0 - r, x_0 + r] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction dérivable. Supposons que* $f'(x_0) \neq 0$ *et qu'il existe* $0 < k < 1$ *tel que*

(1) $\left| 1 - \dfrac{f'(x)}{f'(x_0)} \right| \leq k, \quad \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r].$ (2) $\left| \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq r(1-k).$

Alors f *possède une racine* a *unique dans* $[x_0 - r, x_0 + r]$. *De plus, pour tout* $x_1 \in [x_0 - r, x_0 + r]$, *la suite* x_n *définie par la récurrence*

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad n \geq 1}$$

a ppour limite a. La vitesse de convergence de cette suite est estimée par

$$\boxed{|x_n - a| \leq \left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right| \frac{k^n}{1-k}.}$$

En prenant $x_1 = x_0$, on obtient

$$\boxed{|x_n - a| \leq r k^{n-1}.}$$

Preuve : Posons $t(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x_0)}$. On vérifie, aisément, que t est une transfomation contractante de $[x_0 - r, x_0 + r]$ dans $\mathbb{R}$, le reste résulte du théorème du point fixe en posant $x_n = t^{n-1}(x_1)$ et $x_1 - t(x_1) = f(x_1)/f(x_0)$.

Exemple 6.0.5 Cherchons la racine de 2. Posons $f(x) = x^2 - 2$, le problème est de chercher la racine positive de f. Pour cela, choisissons $x_0 = 3/2$ et $r = 1/2$. Alors

$$\left|1 - \frac{f'(x)}{f'(x_0)}\right| = \left|\frac{3-2x}{3}\right| \leq \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right| = \frac{1}{12}.$$

On peut prendre $k = 1/3$. Et on doit itérer la fonction

$$t(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)} = \frac{3x - x^2 + 2}{3}.$$

On commence l'itération avec $x_1 = x_0 = 3/2$ et on obtient

$$x_2 = 7/12, \; x_3 = 611/432, \quad \text{etc...}$$

La convergence est éstimée par

$$|x_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}. \quad \blacklozenge$$

6.0.2 Exemples d'objets fractals

Définition 6.0.5 *Les objets fractals ont étés étudiés pour la première fois par Benoît Mandelbrot en 1975. Ce sont des sous-ensembles du plan, de l'espace ou plus généralement de $\mathbb{R}^n$:*

Un fractal est la réunion de sous-ensembles qui sont fractions de lui-même.

1 - **L'intervalle [0,1] :** Il est réunion des 2 intervalles $[0, 1/2]$ et $[1/2, 1]$. Posons

$$w_1(x) = \frac{1}{2}x \quad \text{et} \quad w_2(x) = \frac{1}{2}(x-1)+1.$$

Il vient que

$$[0, 1/2] = w_1([0,1]) \qquad \text{et} \qquad [1/2, 1] = w_2([0,1]).$$

Donc

$$[0,1] = w_1([0,1]) + w_2([0,1]).$$

Ainsi $[O, 1]$ est réunion de deux "moitiés" de lui-même. ◆

2 - **L'ensemble de Cantor (1872) :** On partage l'intervalle $[0, 1]$ en trois intervalles égaux et on enlève l'intervalle ouvert du milieu, à savoir, $]1/3, 2/3[$. On obtient alors

$$C_0 = [0,1], \qquad C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1] = C \backslash]1/3, 2/3[.$$

On définit ainsi $C_{k+1} = C_k \setminus M_k$ où M_k est la réunion des 2^{k-1} intervalles ouverts qui sont les tiers du milieu des intervalles dont C_k est réunion, alors

$$\boxed{C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k \subset \mathbb{R}.}$$

Soient

$$w_1(x) = \frac{1}{3}x \quad \text{et} \quad w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

C'est des homothéties de rapport $1/3$ et de centre respectivement 0 et 1. Alors

$$\boxed{C = w_1(C) \bigcup w_2(C).}$$

Donc, C est réunion de deux copies réduites de lui-même. ◆

3 - **Le triangle de Sierpinski (1916) :** Soit p est un point de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, notons par $w_p^\lambda : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'homothétie de centre p et de rapport λ :

$$w_p^\lambda(x) = \lambda(x-p) + p.$$

Le triangle de Sieprinski est un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^2$ qui est obtenu ainsi : On part d'un triangle de sommets A, B, C dont on prend les milieux A', B', C' des côtés $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ respectivement. Si on enlève l'intérieur du triangle de sommets A', B', C', il reste trois triangles dont les dimensions sont la moitié de celle du trianle ABC : $A'B'C$, $A'C'B$ et $B'C'A$. On recommence avec ces 3 nouveaux triangles, et ainsi de suite. Si $p \in \mathbb{R}^2$, désignons par w_p^λ l'homothétie de centre p et de rapport λ; on obtient

$$\boxed{S = w_A^{1/2}(S) \bigcup w_B^{1/2}(S) \bigcup w_C^{1/2}(S)}$$

4 - **La courbe de von Koch (1904) :** Soit $I = [0,1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ que l'on partage en trois segments égaux. On construit un triangle équilatéral sur le segment du milieu et on enlève l'intérieur de ce segment. On obtient ainsi 4 nouveaux segments, et on recommence la construction précédente sur chacun d'entre eux. Appelons K le résultat de cette construction; on voit que

$$\boxed{K = w_{(0,0)}^{1/3}(K) \bigcup w_{(1,0)}^{1/3}(K) \bigcup w_3(K) \bigcup w_4(K)}$$

où w_3 est la rotation d'angle $\pi/3$ et de centre $(0,0$ suivie de l'homothétie de centre $(0,0)$ et de rapport $1/3$ puis de la translation par $(1/3,0)$; w_4 est la rotation d'angle $-\pi/3$ et de centre $(1,0)$ suivie de l'homothétie de centre $(1,0)$ et de rapport $1/3$ puis de la translation par $(-1/3,0)$.

5 - **La dimension de Hausdorff (1918) :** Essayons de saisir intuitivement la notion de dimension d'un objet, pour calculer les dimensions des exemples ci-dessus. Il est bien connu que la longueur d'une courbe ou l'air d'une surface sont des notions de ce que l'on appelle **mesure**. Pour chaque dimension $s \geq 0$, on peut définir une mesure μ_s adaptée à cette dimension. Si s est **supérieure** à la dimension de $A \subset \mathbb{R}^n$, on aura $\mu_s(A) = 0$ (par exemple : l'aire d'une courbe est nulle), et si s est **inférieure** à la dimension de A, $\mu_s(A)$ sera infinie (la longueur d'une surface est infinie). Par contre, si A est **compact** et s dimension, alors $\mu_s(A)$ devrait être finie. Ainsi, si l'on fait subir à un objet de dimension s une homothétiede rapport λ, sa mesure μ_s sera multipliée par λ^s :

> **La longueur d'une courbe sera multipliée par λ, l'aire d'une surface sera multipliée par λ^2 e un volume sera multiplié par λ^3. Par contre, la mesure sera invariante par translation et rotation.**

Donc, si un compact $A \subset \mathbb{R}^n$ s'écrit sous la forme :

$$\boxed{A = w_1(A) \cup \cdots w_n(A)}$$

où les w_i sont composées de rotations, translations et homothéties, de même rapport λ et que $w_i(A) \cap w_j(A)$ sont de mesure négligeable, pour $i \neq j$, on aura :

$$\boxed{\mu_s(A) = \mu_s(w_1(A)) + \cdots + \mu_s(w_n(A)) = n\lambda^s \mu_s(A).}$$

D'où

$$\boxed{s = \dim(A) = \frac{\ell n(n)}{\ell n(1/\lambda)}}$$

Dans le cas de l'ensemble de Cantor, on trouve :

$$\dim(C) = \frac{\ell n(2)}{\ell n(3)} = 0,6309297534...$$

Pour le triangle de Sierpinski S, on trouve :

$$\dim(S) = \frac{\ell n(3)}{\ell n(2)} = 1,584962501...$$

et pour la courbe de Von Koch :

$$\dim(K) = \frac{\ell n(4)}{\ell n(3)}.$$

Ces exemples, nous informe du lien qui existe entre la notion de dimension de Hausdorff et la structure fractale.

6.0.3 L'espace métrique des compacts

Notons par $\|x\|$ la norme euclidienne et par $d(x, y)$ la distance euclidienne où $x, y \in \mathbb{R}^n$. Rappelons que si $A \subset X$ et $f : A \longrightarrow X$ est continue alors $f(A)$ est compact et f atteint ses bornes.

Définition 6.0.6 *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ non vide et $x \in \mathbb{R}^n$. La distance de x à A est définit par*

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}$$

Définition 6.0.7 *Soient K et L deux sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^n$. La* **distance de Hausdorff** *de K et L est*

$$\boxed{d_H(K, L) = \sup\{\sup\{d(x, L) \mid x \in K\}, \sup\{d(K, y) \mid y \in L\}\}}$$

Exemple 6.0.6 Prenons $C \subset \mathbb{R}^2$ le cercle unité centré à l'origine et pour B le carré qui lui est circonscrit. Les points de C qui sont le plus éloignés de B sont les 4 points $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$ et leur distance à B vaut $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Les points de B les plus éloignés de C sont les 4 sommets du carré, et leur distance à A vaut $\sqrt{2} - 1$. Donc $d_H(A, B) = \sqrt{2} - 1$.
◆

Proposition 6.0.8 *La distance de Hausdorff est une métrique sur l'ensemble* $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ *des sous-ensembles compacts non vides de* $\mathbb{R}^n$.

Proposition 6.0.9 *L'espace* $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, *muni de la distance de Hausdorff, est complet.*

Bibliographie

[1] **Falconer K. J.,** 1985. *The Geometry of fractal sets.* Cambridge University Press.

[2] **Horvath J.,** 1966. *Topological vector spaces and Distributions.* Addison-Wesley Publishing Company.

[3] **Mandelbrot B.,** 1975. *Les objets fractals : forme, hasard et dimension.* Flammarion, Paris.

[4] **Serge Lang J.,** 1983. *Real Analysis.* Addison-Wesley Publishing Company.

[5] **Scheafer H. H.,** 1986. *Topological Vector Space. Springer-Verlag*, New York.