Solution d'exercice 01:(*..pts*)

1. i) Montrons que, si $\psi : E \longrightarrow F$ est continue, Γ est fermé dans $E \times F$, où

$$\Gamma = \Big\{(x, \psi(x)) \setminus x \in E\Big\} \subset E \times F$$

Considérons

$$\varphi : E \times F \longrightarrow F \times F, \quad (x, y) \longmapsto (\psi(x), y)$$

elle est continue, comme les deux applications composantes, ... pts

$$(x, y) \longmapsto x \longmapsto \psi(x) \qquad \text{et} \qquad (x, y) \longmapsto y$$

Dans ces conditions, $\Gamma = \varphi^{-1}(\Delta)$, où Δ est la diagonale de $E \times F$, est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue........... pts
ii) Montrons que la réciproque étant fausse.
La fonction $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x},\ x \neq 0$ considérée n'est pas continue, pourtant son graphe

$$\Gamma = \Big\{(0, 0)\Big\} \cup \Omega, \quad \text{est fermé.......... pts}$$

où $\Omega = \Big\{(x, \frac{1}{x}); x \in \mathbb{R}^\star\Big\} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^{\star 2}; xy = 1\Big\} = (f - g)^{-1}(\{0\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue $f - g$, avec $f : (x, y) \longrightarrow xy$, $g : (x, y) \longrightarrow 1$, sont effectivement continues........... pts

2. On a $\mathbb{R}$ munit par de la distance

$$d(x, y) = \Big|\arctan x - \arctan y\Big|$$

i) Comparons cette distance à $d_1(x, y) = |x - y|$
On a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad d(x, y) < \pi$, $(\mathbb{R}, d)$ est donc borné alors que $(\mathbb{R}, d_1)$ ne l'est pas, $\frac{d_1(x,y)}{d(x,y)} \quad (x \neq y)$ n'set pas majoré et les distance ne sont pas équivalentes........... pts
Cependant l'égalité

$$\arctan x - \arctan y = \frac{x - y}{1 + z^2}, \text{........... pts}$$

où $z \in]x, y[$ (formule des accroissements finis) prouve que

$$\forall (x, y), \quad d(x, y) \leq d_1(x, y)\text{........... pts}$$

ii) Montrons que $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet
La suite définie par $u_n = n$ est de Cauchy dans (E, d) puisque

$$d(p, q) = \Big|\arctan p - \arctan q\Big| = \Big|\arctan \frac{p - q}{1 + pq}\Big| < \varepsilon, \text{........... pts}$$

pourvu que

$$\Big|\frac{p - q}{1 + pq}\Big| < \tan \varepsilon, \text{........... pts}$$

c'est-à-dire, en remarquant que

$$\Big|\frac{p - q}{1 + pq}\Big| < \frac{q}{pq} = \frac{1}{p} < \frac{1}{n_0}, \text{........... pts}$$

Si $n_0 > \tan\varepsilon$ et $n_0 < p < q$.
Si cette suite convergeait dans $(\mathbb{R}, d)$ vers l (nécessairement non nul), la condition

$$d(n,l) < \varepsilon \Longleftrightarrow \left|\frac{n-l}{1+nl}\right| < \tan\varepsilon, \text{..........} \text{ pts}$$

ne saurait être réalisée pour n assez grand, puisque

$$\frac{n-l}{1+nl} > \frac{1}{2l}, \quad \text{pour} \quad n > \frac{2l^2+1}{2l}, \text{..........} \text{ pts}$$

ce qui est une contradiction si ε est choisi tel que $\tan\varepsilon < \frac{1}{2l}$........... pts
Donc $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet........... pts

Solution d'exercice 02:(..*pts*)

1. Montrons que pour $x \notin H$, $d(x,H) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}$, où $H = \ker f$, $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.
   Remarquons d'abord que H est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par f continue, donc $x \notin H \Longrightarrow d(x,H) \neq 0$........... pts
   On a
   $$d(x,H) = \inf_{y\in H} \|x-y\|, \text{..........} \text{ pts}$$
   mais
   $$(\forall y \in H): \quad |f(x)| = |f(x-y)| \leq \|f\| \cdot \|x-y\|, \text{..........} \text{ pts}$$
   il en résulte
   $$d(x,H) \geq \frac{|f(x)|}{\|f\|} \text{...........} \text{ pts}$$
   D'autre part, si f est non nulle,
   $$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star) \quad (\exists z \in E): \quad |f(z)| \geq (\|f\| - \varepsilon) \cdot \|z\|, \text{..........} \text{ pts}$$
   il existe $y_0 \in H$ et $\lambda_0 \in \mathbb{C}^\star$ tels que $z = y_0 - \lambda_0 x$, $f(z) = -\lambda_0 f(x)$, d'où
   $$|f(z)| = |\lambda_0| \cdot |f(x)| \geq (\|f\| - \varepsilon) \cdot \|\lambda_0 x - y_0\|, \text{..........} \text{ pts}$$
   $$|f(z)| \geq \Big(\|f\| - \varepsilon\Big) \cdot \left\|x - \frac{y_0}{\lambda_0}\right\|, \text{..........} \text{ pts}$$
   il en résulte
   $$(\forall \varepsilon, \quad \varepsilon < \|f\|): \quad d(x,H) \leq \frac{|f(x)|}{\|f\| - \varepsilon} \text{..........} \text{ pts}$$
   et, par suite,
   $$d(x,H) = \frac{|f(x)|}{\|f\|} \text{..........} \text{ pts}$$

2. On définit sur l'espace de Banach $(E, \|\cdot\|_\infty)$ avec $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, l'application suivante $\varphi : E \longrightarrow E$ par:
   $$\varphi(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{4+t^2}\, dt$$
   i) Montrons que $\forall x \in [0,1]$: $\arctan x \leq x$
   D'après le théorème des accroissements finis, on a
   $$\arctan x - \arctan 0 = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}\, dt \leq \sup_{0\leq t\leq x} \frac{1}{1+t^2} \int_0^x dt \text{................} \text{ pts}$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est décroissante, donc $\sup\limits_{0\leq t\leq x} \dfrac{1}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+0} = 1$, $\arctan 0 = 0$, et $\displaystyle\int_0^x dt = x$.
Combinant les estimations précédentes, on trouve : $\arctan x \leq x$................. pts
ii) Montrons que l'équation $\varphi(f) - f = 0$ admet une solution unique dans E.
On a $\varphi(f) - f = 0 \Longleftrightarrow \varphi(f) = f$. Donc, il suffit de démontrer que φ admet un point fixe unique.
On a $\varphi : E \to E$ admet un point fixe unique si et seulement si E est complet, $\varphi(E) \subset E$ et φ est contractante............ pts

- E est complet, car il est de Banach............ pts
- $\varphi(E) \subset E$ par définition............ pts
- φ est contractante sur E si et seulement si

$$\exists k \in]0,1[, \forall f, g \in E : \ \|\varphi(f) - \varphi(g)\|_\infty \leq k\|f-g\|_\infty \text{............ pts}$$

Soit $x \in [0,1]$, on a :

$$\varphi(f)(x) - \varphi(g)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{4+t^2}\,dt - \int_0^x \frac{g(t)}{4+t^2}\,dt = \int_0^x \frac{f(t)-g(t)}{4+t^2}\,dt \text{............ pts}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\big|\varphi(f)(x) - \varphi(g)(x)\big| = \Big|\int_0^x \frac{f(t)-g(t)}{4+t^2}\,dt\Big| &\leq \int_0^x \frac{|f(t)-g(t)|}{4+t^2}\,dt \\
&\leq \sup_{t\in[0,x]} |f(t)-g(t)| \int_0^x \frac{dt}{4+t^2} \\
&\leq \sup_{t\in[0,1]} |f(t)-g(t)| \frac{1}{4}\int_0^x \frac{dt}{4+(\frac{t}{2})^2} \\
&= \frac{1}{2}\|f-g\|_\infty \arctan\frac{x}{2} \text{............ pts}
\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[0,1]} \big|\varphi(f)(x) - \varphi(g)(x)\big| = \|\varphi(f)-\varphi(g)\|_\infty &\leq \sup_{x\in[0,1]} \left(\frac{1}{2}\|f-g\|_\infty \arctan\frac{x}{2}\right) \\
&\leq \left(\frac{1}{2}\|f-g\|_\infty\right) \sup_{x\in[0,1]} \arctan\frac{x}{2} \\
&\leq \frac{1}{4}\|f-g\|_\infty \text{............ pts}
\end{aligned}$$

Donc, il existe $k = \frac{1}{4} \in]0,1[$ tel que :

$$\forall f, g \in E : \ \|\varphi(f)-\varphi(g)\|_\infty \leq k\|f-g\|_\infty \text{............ pts}$$

D'après le théorème du point fixe, l'application φ admet un point fixe unique............ pts

Corrigé de l'examen d'Analyse et EDOs