Exercice 01:(.. pts)

1. Soit E et F deux espaces topologiques (F est séparé), $\psi : E \longrightarrow F$ est une application, son graphe est
$$\Gamma = \Big\{(x, \psi(x)) \setminus x \in E\Big\} \subset E \times F$$
Montrer que, si ψ est continue, Γ est fermé dans $E \times F$, la réciproque étant fausse (considérer $E = F = \mathbb{R}$ et $\psi : x \longmapsto \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, avec $\psi(0) = 0$) ?

2. On munit $\mathbb{R}$ de la distance
$$d(x, y) = \Big|\arctan x - \arctan y\Big|$$
i) Comparer cette distance à $d_1(x, y) = |x - y|$?
ii) Montrer que $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet (considérer la suite $u_n = n$)?

Exercice 02:(.. pts)

1. Soit f une forme linéaire continue sur l'espace vectoriel normé E et l'hyperplan $H = \ker f$; pour $x \notin H$ montrer que $d(x, H) = \dfrac{|f(x)|}{\|f\|}$?

2. On définit sur l'espace de Banach $(E, \|\cdot\|_\infty)$ avec $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, l'application suivante $\varphi : E \longrightarrow E$ par:
$$\varphi(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{4 + t^2}\, dt$$
i) Montrer que $\forall x \in [0, 1] : \arctan x \leq x$?
ii) Sachant que $\arctan x = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1 + t^2}\, dt$, montrer que l'équation $\varphi(f) - f = 0$ admet une solution unique dans E?

Concours d'Accée en Première Année Doctorat (D-LMD). Mathématiques