Université Mohamed Boudiaf-M'sila **2 éme Année** *Licence Maths*
Département des Mathématiques-MI **Semestre :** *3*
Module: Introduction à la Topologie **Année :** *2023-2024*

Corrigé de l'examen final

Solution d'exercice 01 :(07 pts)

$E = \{1,2,3,4,5\}$, $\tau = \{\emptyset, E, \{1\}, \{1,3\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$

1. Montrons que (E,τ) est un espace topologique. ....(01 pts)

   i) $\emptyset, E \in \tau$,

   ii) $\forall A \in \tau : \emptyset \cap A = \emptyset \in \tau, E \cap A = A \in \tau, \emptyset \cap \emptyset = \emptyset \in \tau, \emptyset \cap E = \emptyset \in \tau$,
   $E \cap E = E \in \tau, \{1\} \cap \emptyset = \emptyset \in \tau, \{1\} \cap \{1,3\} = \{1\} \in \tau, \{1\} \cap \{1,3,4\} = \{1\} \in \tau, \{1\} \cap \{1,2,3,4\} = \{1\} \in \tau, \{1\} \cap E = \{1\} \in \tau, \{1,3\} \cap \emptyset = \emptyset, \{1,3\} \cap \{1\} = \{1\} \in \tau, \{1,3\} \cap \{1,3\} = \{1,3\} \in \tau, \{1,3\} \cap \{1,3,4\} = \{1,3\} \in \tau$,
   $\{1,3\} \cap \{1,2,3,4\} = \{1,3\} \in \tau, \{1,3\} \cap E = \{1,3\} \in \tau$,
   $\{1,3,4\} \cap \emptyset = \emptyset, \{1,3,4\} \cap \{1,3\} = \{1,3\} \in \tau, \{1,3,4\} \cap \{1,3,4\} = \{1,3,4\} \in \tau$,
   $\{1,3,4\} \cap \{1,2,3,4\} = \{1,3,4\} \in \tau, \{1,3,4\} \cap E = \{1,3,4\} \in \tau, \{1,2,3,4\} \cap \emptyset = \emptyset \in \tau, \{1,2,3,4\} \cap E = \{1,2,3,4\} \in \tau$,

   ii) $\forall A \in \tau : \emptyset \cup A = A \in \tau, E \cup A = E \in \tau, \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \in \tau, \emptyset \cup E = E \in \tau$,
   $E \cup E = E \in \tau, \{1\} \cup \emptyset = \{1\} \in \tau, \{1\} \cup \{1,3\} = \{1,3\} \in \tau, \{1\} \cup \{1,3,4\} = \{1,3,4\} \in \tau, \{1\} \cup \{1,2,3,4\} = \{1,2,3,4\} \in \tau, \{1\} \cup E = E \in \tau, \{1,3\} \cup \emptyset = \{1,3\} \in \tau, \{1,3\} \cup \{1,3\} = \{1,3\} \in \tau, \{1,3\} \cup \{1,3,4\} = \{1,3,4\} \in \tau$,
   $\{1,3\} \cup \{1,2,3,4\} = \{1,2,3,4\} \in \tau, \{1,3\} \cup E = E \in \tau$,
   $\{1,3,4\} \cup \emptyset = \{1,3,4\} \in \tau, \{1,3,4\} \cup \{1,3\} = \{1,3,4\} \in \tau, \{1,3,4\} \cup \{1,3,4\} = \{1,3,4\} \in \tau$,
   $\{1,3,4\} \cup \{1,2,3,4\} = \{1,2,3,4\} \in \tau, \{1,3,4\} \cup E = E \in \tau, \{1,2,3,4\} \cup \emptyset = \{1,2,3,4\} \in \tau, \{1,2,3,4\} \cup E = E \in \tau$,

   Donc τ est une topologie et (E,τ) est un espace topologique.

2. L'ensemble F de tous fermés de l'espace (E,τ) est

   $F = \{\emptyset, E, \{2,3,4,5\}, \{2,4,5\}, \{2,5\}, \{5\}\}$..(01 pts)

   les ensemble des voisinages sont : $\mathbf{V}(2) = \{E, \{1,2,3,4\}\}$. ....(0,5 pts)

   $\mathbf{V}(3) = \{E, \{1,3\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,3,4,5\}, \{1,2,3,5\}\}$..............(0,5 pts)

3. Comme $H = \{1,4,5\}$,
   L'intérieur de H est $\overset{0}{H} = \{1\}$ ....(01 pts)

   Montrons que H est partout dense dans E, i.e. $\overline{H} = E$. ....(0,5 pts)
   On a $1,4,5 \in H \Longrightarrow 1,4,5 \in \overline{H}$ puisque $H \subseteq \overline{H}$ ....(0,5 pts)

   $$\forall\, V \in \mathbf{V}(2) : V \cap H \neq \emptyset \Longrightarrow 2 \in \overline{H}$$

   $$\forall\, V \in \mathbf{V}(3) : V \cap H \neq \emptyset \Longrightarrow 3 \in \overline{H}$$

   Donc $\overline{H} = E$ ....(0,5 pts)

4. Comme $f : (E,\tau) \to (E,\tau)$ est une application définie par :

$$f(1) = 5,\ f(2) = 3,\ f(3) = 4,\ f(4) = 2,\ f(5) = 1$$

Étudions la continuité de l'application f au point $x_0 = 2$.
On a $\{2,5\} \in f^{-1}(\mathbf{V}(3))$, alors $\{2,5\} \notin \mathbf{V}(2)$. ....(01 pts)
Donc f n'est pas continue au point $x_0 = 2$. ....(0,5 pts)

Solution d'exercice 02 :(06 pts)

Comme $E =]0,+\infty[$ et $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une application définie par : $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$

1. Vérifions que d est une distance sur E (Utilisant $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est un espace métrique) . ...(02 pts)
   i) Positive : $\forall x,y \in E;\ d(x,y) \geq 0,\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
   ii) Symétrie : $\forall x,y \in E;\ d(x,y) = d(y,x)$.
   iii) Soient $x,y,z \in E$. On a : $d(x,z) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right| \leq \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| + \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right| = d(x,y) + d(y,z)$.
2. Décrivons en fonction de r la boule ouverte $B(1,r)$. Comme $r \geq 1$, on a

   $$B(1,r) = \{x \in E : d(x,1) < r\} = \{x \in E : \left|\frac{1}{x} - 1\right| < r\} = \{x \in E : 1-r < \frac{1}{x} < 1+r\}$$

   Alors

   $$B(1,r) = \left]\frac{1}{1+r}, +\infty\right[\text{..................(01 pts)}$$

3. Montrons que $(u_n)_{n\in N}$ est une suite de Cauchy dans (E,d) avec $u_n = n^2$:
   Pour $n,m \in \mathbb{N}^\star$ avec $m \geq n$ on a $d(u_n,u_m) = \left|\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} < \varepsilon$
   Donc $(u_n)_{n\in N}$ est une suite de Cauchy dans (E,d). ....(01 pts).
4. Par l'absurde supposons que (E,d) est un espace métrique complet, comme la suite $u_n = n^2$ de Cauchy dans (E,d) alors on $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = l \in E$ i.e..........................(01 pts).

   $$d(u_n,l) = \left|\frac{1}{l} - \frac{1}{n^2}\right| < \varepsilon \Longrightarrow \frac{1}{l} < \varepsilon + \frac{1}{n^2} \Longrightarrow \frac{1}{l} = 0$$

   Ce qui est une contradiction. Donc (E,d) n'est pas un espace métrique complet. ....(01 pts).

Solution d'exercice 03 :(04 pts)

Dans $(\mathbb{R}^2, d_2)$, considérons les ensembles suivants :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 = 1\},\ B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2y^2 \geq 1\}$$

1. Représentation graphique des A et B. ....(01 pts)
2. Étudions la compacité de A et B
   Premièrement, soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x,y) = x^2 + y^2$. On a $A = f^{-1}(\{1\})$, f est continue sur $\mathbb{R}^2$, et $\{1\}$ est fermée dans $\mathbb{R}$.
   Donc A est fermée. ....(0,5 pts)

A est bornée dans $\mathbb{R}^2$ car $A \subset \overline{A}(0,r)$ with $r \geq 1$, alors A est compacte. ....$(0,5$ pts$)$
Deuxièmement, soit la fonction $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par : $g(x,y) = x^2y^2$.
On a $B = g^{-1}([1,+\infty[)$, g est continue sur $\mathbb{R}^2$, et $[1,+\infty[$ est fermée dans $\mathbb{R}$.
Donc B est fermée. ....$(0,5$ pts$)$
Comme B n'est pas bornée dans $\mathbb{R}^2$, donc B n'est pas compacte. ....$(0,5$ pts$)$

3. Étudions la connexité de A
   Soit la fonction $\psi :]-\pi,+\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall x \in]-\pi,+\pi] : \psi(x) = (\cos x, \sin x)$$

   On a $A = \psi(]-\pi,+\pi])$.
   Comme ψ est continue sur $]-\pi,+\pi]$ et $]-\pi,\pi]$ est connexe dans $\mathbb{R}^2$. ....$(0,5$ pts$)$
   Donc A est connexe. ....$(0,5$ pts$)$

Solution d'exercice 04 :(03 pts)
Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$

1. Vérifions que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty : E &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ f &\longmapsto \|f\|_\infty \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \|f\|_\infty = 0 \Longleftrightarrow f = 0, \text{.............(0,5 pts)} \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f \in E : \|\alpha f\|_\infty = |\alpha|\|f\|_\infty, \quad \text{(Homogénéité),.......(0,5 pts)} \\ \forall f,g \in E : \|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty, \quad \text{(Inégalité triangulaire).............(0,5 pts)} \end{cases}$$

2. La réponse : Oui i.e. $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé de Banach. ....$(0,5$ pts$)$
   Justification :
   On dit qu'un e.v.n $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach si l'espace métrique associée à la norme $\|.\|$ est un espace métrique complet.
   Soit (f_n) une suite de Cauchy dans E. i.e. $\lim_{n,m\to+\infty} \|f_n - f_m\|_\infty = 0$. Ce qui donne $(f_n(x))$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ (Banach), elle converge vers $(f(x))$.
   Donc (f_n) converge vers $f \in E$. ....$(0,5$ pts$)$.
3. On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F. La norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ sur $\mathcal{L}(E,F)$ définie par :

$$\|H\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|f\|_E=1} \|H(f)\|_F = \sup_{\|f\|_E\leq 1} \|H(f)\|_F = \sup_{f\neq 0} \frac{\|H(f)\|_F}{\|f\|_E}$$

   Dans notre cas $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $F = \mathbb{R}$, on peut définir la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}$ comme suit : ....$(0,5$ pts$)$

$$\|H\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})} = \sup_{\|f\|_\infty=1} |H(f)|_\mathbb{R} = \sup_{\|f\|_\infty\leq 1} |H(f)|_\mathbb{R} = \sup_{f\neq 0} \frac{|H(f)|_\mathbb{R}}{\|f\|_\infty}$$

Notre espoir est d'avoir réussi !
Votre enseignant H. Abdelaziz