Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Département des Mathématiques-MI
Module: Introduction à la Topologie

Semestre : 03, 2 *éme Année*
Date : *17-01-2024*. **Durée :** *01h30*

EXAMEN FINAL

Exercice 01 :(07 pts)

Soient $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et la famille $\tau = \{\emptyset, E, \{1\}, \{1, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$

1. Montrer que (E, τ) est un espace topologique ?
2. Donner l'ensemble F de tous fermés de l'espace (E, τ), les ensemble des voisinages $\mathbf{V}(2)$, et $\mathbf{V}(3)$?
3. On pose $H = \{1, 4, 5\}$
   Déterminer l'intérieur de H et Montrer que H est partout dense dans E ?
4. Soit l'application $f : (E, \tau) \to (E, \tau)$ définie par :

$$f(1) = 5,\ f(2) = 3,\ f(3) = 4,\ f(4) = 2,\ f(5) = 1$$

   Étudier la continuité de l'application f au point $x_0 = 2$?

Exercice 02 :(06 pts)

Soit $E =]0, +\infty[$ et l'application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $d(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$

1. Vérifier que d est une distance sur E ?
2. Soit $r \geq 1$. Décrire en fonction de r la boule ouverte $B(1, r)$?
3. Soit la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par $u_n = n^2$. Montrer que $(u_n)_{n\in N}$ est une suite de Cauchy dans (E, d) ?
4. (E, d) est-il complet ?

Exercice 03 :(04 pts)

Considérons l'espace métrique $(\mathbb{R}^2, d_2)$ et les deux ensembles suivants :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 = 1\},\ B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2y^2 \geq 1\}$$

1. Tracer dans un repère orthonormé A et B ?
2. Étudier la compacité de A et B ?
3. Étudier la connexité de A ?

Exercice 04 :(03 pts)

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$

1. Vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ est norme sur E ?
2. Est ce que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach ? Justifier votre réponse ?
3. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F. Définir la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ sur $\mathcal{L}(E, F)$ dans le cas $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $F = \mathbb{R}$?

Bonne chance !