Corrigé type d'examen final : Méthodes variationnelles et applications

1. **(1 pt)** Une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible de (P) si et seulement si :

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx - \int_\Omega |u|^{q-2} uv \, dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

2. (a) **(1 pt)** Pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ on a $\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \|u\|^2_{H_0^1} < \infty$, et d'après l'injection continue $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ ($q \in [2, 2^*[\subset [1, 2^*]$), alors il existe $C_0 > 0$, tel que :

$$\|u\|_{L^q} \leq C_0 \|u\|_{H_0^1}, \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{1}$$

donc $\int_\Omega |u|^q \, dx < \infty$.

   (b) **(0.5+ 1=1.5 pt)** On a $\varphi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, de plus :

$$\langle \varphi'(u), v \rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx - \int_\Omega |u|^{q-2} uv \, dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

On peut voir facilement que :

$$\begin{aligned} u \in H_0^1(\Omega) \text{ est un point critique de } \varphi \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi'(u) = 0 \text{ dans } \left(H_0^1(\Omega)\right)' \\ &\Leftrightarrow \quad \langle \varphi'(u), v \rangle = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ &\Leftrightarrow \quad \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx - \int_\Omega |u|^{q-2} uv \, dx = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad u \text{ est une solution faible de } (P) \end{aligned}$$

3. (a) **(1 pt)** En utilisant (1), on obtient $\varphi(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1} - C_1 \|u\|^q_{H_0^1}$, avec $C_1 = C_0^q$.

   (b) **(1.5 pt)** Comme $q > 2$, alors il existe $\rho > 0$ suffisament petit de sorte que $\frac{1}{2}\rho^2 - C_1\rho^q > 0$, on pose $\alpha = \frac{1}{2}\rho^2 - C_1\rho^q$, alors on peut écrire :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{H_0^1} = \rho : \varphi(u) \geq \frac{1}{2}\rho^2 - C_1\rho^q = \alpha > 0.$$

4. (a) **(1 pt)** On a $\varphi(tv) = \frac{1}{2}t^2 \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \frac{1}{q}t^q \int_\Omega |v|^q \, dx = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{q}\theta t^q$, comme $q > 2$, alors $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \varphi(tv) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{q}\theta t^q = -\infty$.

   (b) **(1 pt)** D'après la question (4-a), il existe $t_0 >> 0$ suffisament grand de sorte que $\varphi(t_0 v) < 0$ et $\|t_0 v\|_{H_0^1} = t_0 > \alpha$. Donc on prend $\psi = t_0 v$.

5. (a) **(1 pt)** On dit que φ est satisfaite la condition de Plais Smale (P.S) si : pour toute suite $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ telle que $|\varphi(u_n)| \leq C$ et $\varphi'(u_n) \to 0$ dans $\left(H_0^1(\Omega)\right)'$, on peut extraire une sous-suite qui converge fortement dans $H_0^1(\Omega)$.

(b) **(0.5 pt)** Soit $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ une suite de (P.S) ; c.à.d.

$$|\varphi(u_n)| \leq C, \quad \varphi'(u_n) \to 0 \quad \text{dans} \quad \big(H_0^1(\Omega)\big)'. \tag{2}$$

i. **(0.5+ 0.5 pt)** Facilement de voir que $|\langle \varphi'(u_n), u_n\rangle| \leq \|\varphi'(u_n)\|_{(H_0^1)'}\|u_n\|_{H_0^1}$.
D'après (2), $\|\varphi'(u_n)\|_{(H_0^1)'} \to 0$, alors pour n suffisament grand on a $\|\varphi'(u_n)\|_{(H_0^1)'} \leq$ 1 et par suite $|\langle \varphi'(u_n), u_n\rangle| \leq \|\varphi'(u_n)\|_{(H_0^1)'}\|u_n\|_{H_0^1} \leq \|u_n\|_{H_0^1}$.
On déduit que :

$$\varphi(u_n) - \frac{1}{q}\langle \varphi'(u_n), u_n\rangle \leq |\varphi(u_n)| + \frac{1}{q}|\langle \varphi'(u_n), u_n\rangle| \leq C + \frac{1}{q}\|u_n\|_{H_0^1}.$$

ii. **(1.5 pt)** Supposons que (u_n) n'est pas bornée dans $H_0^1(\Omega)$, alors il existe une sous suite (u_{n_k}) (notée (u_n)) telle que $\|u_n\|_{H_0^1} \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.
On a :

$$\begin{aligned}
C + \frac{1}{q}\|u_n\|_{H_0^1} \geq \varphi(u_n) - \frac{1}{q}\langle \varphi'(u_n), u_n\rangle &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx - \frac{1}{q}\int_\Omega |u_n|^q\,dx \\
&\quad -\frac{1}{q}\Big[\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx - \int_\Omega |u_n|^q\,dx\Big] \\
&= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\Big)\|u_n\|_{H_0^1}^2
\end{aligned}$$

ce qui implique que $\big(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\big)\|u_n\|_{H_0^1}^2 - \frac{1}{q}\|u_n\|_{H_0^1} \leq C$; ça c'est impossible car $\big(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\big)\|u_n\|_{H_0^1}^2 - \frac{1}{q}\|u_n\|_{H_0^1} \to +\infty$ quand $\|u_n\|_{H_0^1} \to +\infty$ et ceci à cause de $q > 2$ c.à.d. $\frac{1}{2} - \frac{1}{q} > 0$. la conclusion donc est que la suite (u_n) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.

(c) **(0.75+0.75+0.5=2 pt)**

i. Comme (u_n) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ qui est réflexif, alors on peut extraire une sous suite (u_{n_k}) (notée (u_n)) et une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$.
D'près l'injection compacte $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow_{comp} L^q(\Omega)$ ($q \in [2, 2^*[\subset [1, 2^*[$), alors $u_n \to u$ fortement dans $L^q(\Omega)$; ($\|u_n - u\|_{L^q} \to 0$, quand $n \to +\infty$).
Comme $u_n \to u$ fortement dans $L^q(\Omega)$, alors d'près T.C.D iverse, il existe une sous suite de (u_n) (notée toujours (u_n)) telle que $u_n(x) \to u(x)$ p.p. $x \in \Omega$.

ii. **(0.5+0.5=1 pt)** Comme $\varphi'(u) \in \big(H_0^1(\Omega)\big)'$ et $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, alors
$\langle \varphi'(u), u_n\rangle \to \langle \varphi'(u), u\rangle$, d'où $\langle \varphi'(u), u_n - u\rangle \to 0$ quand $n \to +\infty$.
De même, comme $\varphi'(u_n) \in \big(H_0^1(\Omega)\big)'$ pour tout n et $\varphi'(u_n) \to 0$ dans $\big(H_0^1(\Omega)\big)'$ et $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, alors on a $\langle \varphi'(u_n), u_n - u\rangle \to 0$ quand $n \to +\infty$.

(d) **(1 pt)**

$$\begin{aligned}
\langle \varphi'(u_n) - \varphi'(u), u_n - u\rangle &= \langle \varphi'(u_n), u_n - u\rangle - \langle \varphi'(u), u_n - u\rangle \\
&= \int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u)\, dx - \int_\Omega |u_n|^{q-2} u_n (u_n - u)\, dx \\
&\quad - \int_\Omega \nabla u \nabla(u_n - u)\, dx + \int_\Omega |u|^{q-2} u (u_n - u)\, dx \\
&= \|u_n - u\|_{H_0^1} - \int_\Omega (|u_n|^{q-2} u_n - |u|^{q-2} u)(u_n - u)\, dx.
\end{aligned}$$

(e) **(1+0.5=1.5 pt)** On applique l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
\Big| \int_\Omega |u_n|^{q-2} u_n (u_n - u)\, dx \Big| &\le \Big(\int_\Omega |u_n - u|^q\, dx \Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\int_\Omega (|u_n|^{q-1})^{\frac{q}{q-1}}\, dx \Big)^{\frac{q-1}{q}} \\
&= \|u_n\|_{L^q}^{q-1} \|u_n - u\|_{L^q} \\
&\le C_2 \|u_n - u\|_{L^q}.
\end{aligned}$$

La dernière estimation est vraie car $u_n \to u$ dans $L^q(\Omega)$ fortement donc la suite réelle $\|u_n\|_{L^q}^{q-1}$ est bornée.
De la même manière, on a

$$\begin{aligned}
\Big| \int_\Omega |u|^{q-2} u (u_n - u)\, dx \Big| &\le \Big(\int_\Omega |u_n - u|^q\, dx \Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\int_\Omega (|u|^{q-1})^{\frac{q}{q-1}}\, dx \Big)^{\frac{q-1}{q}} \\
&= \|u\|_{L^q}^{q-1} \|u_n - u\|_{L^q} \\
&= C_3 \|u_n - u\|_{L^q}.
\end{aligned}$$

avec $C_3 = \|u\|_{L^q}^{q-1}$.

(f) **(1,5 pt)** D'une part, d'après la question (5-c-ii) on a : $\langle \varphi'(u_n) - \varphi'(u), u_n - u\rangle \to 0$ quand $n \to +\infty$.
D'autre part, d'après (5-e) et comme $\|u_n - u\|_{L^q} \to 0$ quand $n \to +\infty$, alors on a : $\int_\Omega (|u_n|^{q-2} u_n - |u|^{q-2} u)(u_n - u)\, dx \to 0$ quand $n \to +\infty$.
Donc, la question (5-d) assure que $\|u_n - u\|_{H_0^1} \to 0$ quand $n \to +\infty$; c.à.d. la suite (u_n) converge fortement dans $H_0^1(\Omega)$.
On déduit que la fonctionnelle φ satisfait la condition de (P.S).

6. **(1 pt)** On a $\varphi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, les deux conditions géométriques sont satisfaites et la condition de (P.S) est satisfaite. Alors, d'après le théorème de Mountain Pass, la fonctionnelle φ admet aux moins un point critique et par suite, notre problème admet aux moins une solution faible non triviale dans $H_0^1(\Omega)$.