UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA
Faculté des mathématiques et de l'informatique
Département de mathématiques

**11/01/2023**
**Durée: 1h et 30 min**

Master 2: EDP et applications
20022/2023

# Examen final: Méthodes variationnelles et applications

## Exercice 1

**Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. On considère le problème suivant:**

$$\begin{cases} -\Delta u = \cos u, & \textbf{dans } \Omega; \\ u = 0, & \textbf{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

1. **Donner la formulation variationnelle associée au problème (1). Montrer que si $u \in H_0^1(\Omega)$, alors chaque terme dans la formulation variationnelle est bien défini.**
2. **Trouver une fonctionnelle $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, dont les points critiques sont des solutions faibles du problème (1).**
3. **Montrer que $J$ est cœrcive et faiblement semi-continue inférieurement. Que peut-on en conclure?**

## Exercice 2

**Soit $E$ un espace de Banach et soit $I : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle différentielle. Supposons que:**

$$\langle I'(u) - I'(v), u - v\rangle > 0, \quad \forall u, v \in E, \;\; u \neq v.$$

**On fixe $u, v \in E$ et on définit la fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par: $\psi(t) = I\big(u + t(u - v)\big)$.**

1. (a) **Calculer $\psi'(t)$.**
   (b) **On fixe $s < t$, montrer que**
   $$\psi'(t) - \psi'(s) = \frac{1}{t-s}\Big[I'\big(u + t(u-v)\big) - I'\big(u + s(u-v)\big)\Big]\Big[\big(u + t(u-v)\big) - \big(u + s(u-v)\big)\Big].$$
   (c) **En déduire que $\psi$ est strictement convexe, et en particulier on a:**
   $$\psi(t) < t\psi(1) + (1-t)\psi(0).$$
   (d) **Vérifier que $I$ est strictement convexe.**

   **Rappelons que toute fonctionnelle strictement convexe, différentiable et cœrcive, admet un unique point critique.**
2. ***Application:***
   **Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, soit $q \in L^\infty(\Omega)$ satisfait $q(x) \geq 0$ p.p. dans $\Omega$. Soit $A(x)$ une matrice symétrique avec des composantes dans $L^\infty(\Omega)$. Supposons qu'il existe $\lambda > 0$ telle que:**
   $$(A(x)y)y \geq \lambda |y|^2, \quad \textbf{pour p.p } x \in \Omega, \quad \textbf{et pour tout } y \in \mathbb{R}^N.$$
   **Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, on considère le problème suivant:**
   $$\begin{cases} -div(A(x)\nabla u) + q(x)u = f(x), & \textbf{dans } \Omega; \\ u = 0, & \textbf{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$
   **On considère la fonctionnelle associée $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par**
   $$J(u) = \int_\Omega (A(x)\nabla u)\nabla v\, dx + \int_\Omega q(x)uv\, dx - \int_\Omega fv\, dx.$$
   (a) **Ecrire le problème faible associé à (2).**
   (b) **Montrer que $J$ est strictement convexe.**
   (c) **Montrer que $J$ est cœrcive.**
   (d) **Que peut-on en déduire?**