*UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA*
*Faculté des mathématiques et de l'informatique*
*Département de mathématiques*

*Master 2: EDP et applications*
*20022/2023*

***11/01/2023***
***Durée: 1h et 30 min***

# Examen final: Méthodes variationnelles et applications

**Soit $\Omega$ un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ avec $N \geq 3$. On considère le problème de Dirichlet non linéaire suivant:**

$$(1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{q-2}u, & \textbf{dans } \Omega; \\ u = 0, & \textbf{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

**où $q \in [2, 2^*[$ et $2^* = \frac{2N}{N-2}$. Le but de cet exercice est d'étudier l'existence d'une solution faible nontriviale dans l'espace $H_0^1(\Omega)$ en utilisant le théorème de (Mountain Pass).**

1. **Donner la formulation variationnelle associée au problème (1).**
2. **On considère la fonctionnelle $\varphi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ qui définie par:**

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \frac{1}{q}\int_\Omega |u|^q\, dx.$$

   (a) **Justifier que la fonctionnelle $\varphi$ est bien définie.**
   (b) **On admet que $\varphi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$; trouver l'expression de $\langle \varphi'(u), v\rangle$ pour tout $u, v \in H_0^1(\Omega)$ puis vérifier que les points critiques de $\varphi$ sont exactement les solutions faibles de (1).**

3. **On veut démontrer la première condition géométrique qui assure l'existence un strict minimum local de $\varphi$.**
   (a) **Montrer que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ on a: $\varphi(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1} - C_1\|u\|^q_{H_0^1}$.**
   (b) **En déduire qu'il existe $\rho, \alpha > 0$ tels que $\varphi(u) \geq \alpha$, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ avec $\|u\|_{H_0^1} = \rho$.**

4. **Maintenant, on passe à la deuxième condition géométrique. Pour cela, on fixe $v \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\|v\|_{H_0^1} = 1$ et $v \geq 0$, on pose $\theta = \int_\Omega |v|^q\, dx$.**
   (a) **Verifier que $\lim_{t\to+\infty} \varphi(tv) = -\infty$.**
   (b) **En déduire qu'il existe $\psi \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\varphi(\psi) < 0$ avec $\|\psi\|_{H_0^1} > \rho$.**

5. **Dans cette partie, on montre que $\varphi$ satisfait la condition de Palais Smale (P.S)**
   (a) **Enoncer la condition de (P.S).**
   (b) **Soit $(u_n)$ une suite de (P.S); expliquer ça.**
      i. **Vérifier que pour $n$ suffisament grand, on a: $|\langle \varphi'(u_n), u_n\rangle| \leq \|u_n\|_{H_0^1}$, puis en déduire que:**

$$(2) \qquad \varphi(u_n) - \frac{1}{q}\langle \varphi'(u_n), u_n\rangle \leq C + \frac{1}{q}\|u_n\|_{H_0^1}.$$

      ii. **Par l'absurde et en utilaisant la relation (2) montrer que la suite $(u_n)$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.**
   (c) i. **Justifier l'existence d'une sous suite $(u_{n_k})$ de $(u_n)$ (pour simplifier l'ecriture, on garde la notation $(u_n)$) et une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telles que:**

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u, & \textbf{faiblement dans } H_0^1(\Omega). \\ u_n \to u, & \textbf{fortement dans } L^q(\Omega) \textbf{ pour tout } q \in [2, 2^*[. \\ u_n(x) \to u(x), & \textbf{p.p. } x \in \Omega. \end{cases}$$

      ii. **Justifier que l'on a:**

$$\langle \varphi'(u_n), u_n - u\rangle \to 0, \quad \langle \varphi'(u), u_n - u\rangle \to 0; \quad \textbf{quand } n \to +\infty.$$

(d) **Calculer explicitement** $\langle \varphi'(u_n) - \varphi'(u), u_n - u \rangle$.

(e) **Montrer les estimations suivantes:**

$$\begin{aligned} \Big| \int_\Omega |u_n|^{q-2} u_n (u_n - u)\, dx \Big| &\leq C_2 \|u_n - u\|_{L^q} \\ \Big| \int_\Omega |u|^{q-2} u (u_n - u)\, dx \Big| &\leq C_3 \|u_n - u\|_{L^q} \end{aligned}$$

(f) **En déduire que la suite** $(u_n)$ **converge fortement vers** $u$ **dans** $H_0^1(\Omega)$.

6. **Conclure.**

وفّقكم الله