

Echantillonnage des signaux	- 2 -
Echantillonnage idéal	- 2 -
Théorème de Shannon	- 4 -
Extraction du signal original à partir du signal échantillonné	- 5 -
Phénomène de repliement de spectre	- 6 -
Filtre anti-repliement	- 8 -
Différents types d'échantillonnage	- 8 -
Echantillonnage naturel	- 9 -
Echantillonnage régulier ou bloqueur	- 10 -
Echantillonnage moyennneur	- 11 -

Echantillonnage des signaux

L'échantillonnage consiste à représenter un signal $s(t)$ continue par un ensemble de valeurs discrètes $s(nT_e)$ avec n un entier et T_e une constante appelée période d'échantillonnage. Cette opération est l'une des trois étapes de la numérisation des signaux.

Echantillonnage idéal

L'échantillonnage idéal d'un signal analogique $s(t)$ est une opération qui consiste à multiplier $s(t)$ par un train d'impulsions de Dirac de période T_e comme le montre la figure (1).

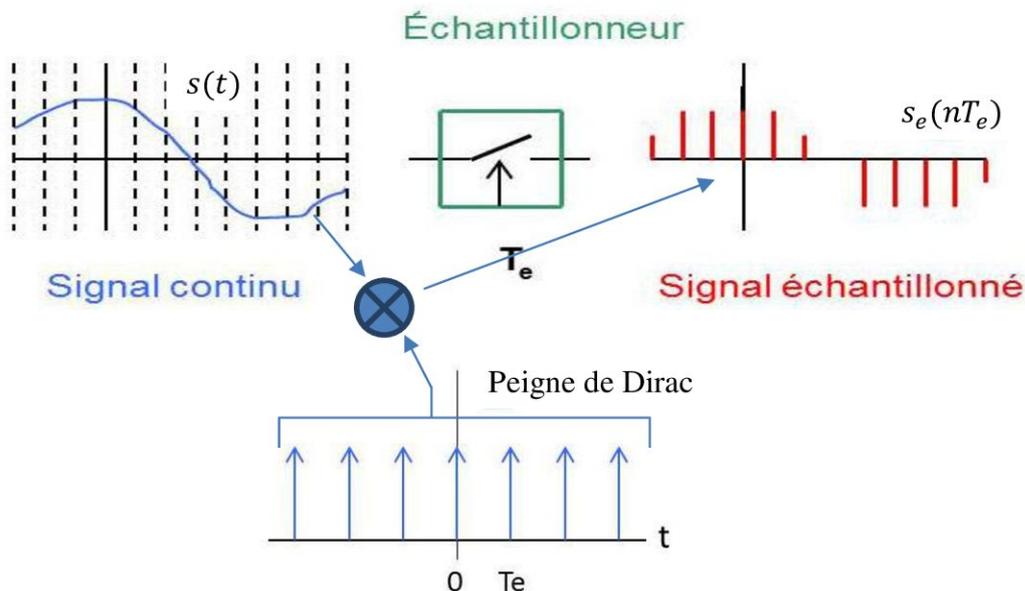


Figure.1. Opération de l'échantillonnage

Soit le signal $s(t)$, à spectre borné, montré dans la figure (2).

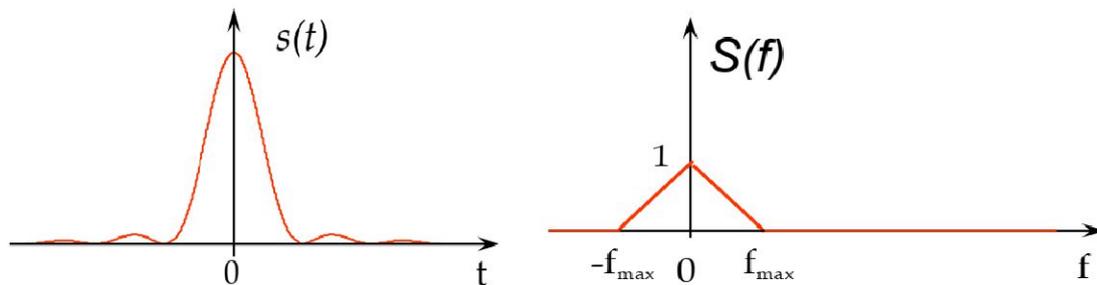


Figure.2. Signal à spectre borné

Le signal, obtenu de l'opération d'échantillonnage du signal précédent, est alors constitué d'une succession d'impulsions dans les aires sont fonctions des amplitudes du signal original (Pour différents instants d'échantillonnage – Voir la figure (3)). L'échantillonnage

est réalisé par un élément intéressant qui est le peigne de Dirac. Comme le montre le plan du milieu de la figure (3), ce peigne est constitué d'un ensemble d'impulsions de Dirac régulièrement espacées de la période d'échantillonnage T_e . Il est donné par :

$$\delta_{T_e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e).$$

Le signal échantillonné $s_e(t)$ est donné par :

$$s_e(t) = s(t) \cdot \delta_{T_e}(t) = s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e). \rightarrow$$

$$s_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_e) \cdot \delta(t - nT_e).$$

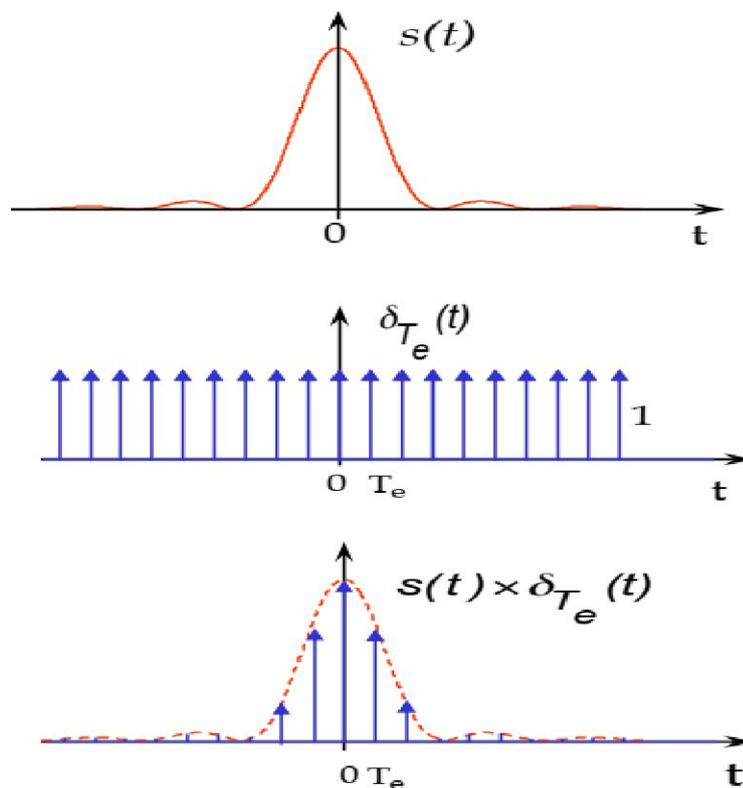


Figure.3. Echantillonnage réalisé par multiplication par un peigne de Dirac

La question qui se pose maintenant est de savoir si le signal échantillonné contient la même information que le signal utile.

Une manière de répondre à cette question consiste à étudier le spectre du signal échantillonné $s_e(t)$ et à le comparer avec celui du signal original $s(t)$.

Le calcul de la TF, donne :

$$\delta_{f_e}(f) = TF[\delta_{T_e}(t)] = TF[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)] = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_e}\right) = f_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_e).$$

Avec : $f_e = \frac{1}{T_e}$ et k est un entier.

D'après l'équation de $\delta_{f_e}(f)$ et la figure (4) (plan du milieu), on remarque que la TF du peigne de Dirac est également un peigne de Dirac de période égale à f_e . Nous avons aussi :

$$S_e(f) = TF[s_e(t)] = TF[s(t) \cdot \delta_{T_e}(t)] = TF[s(t)] * TF[\delta_{T_e}(t)]. \rightarrow$$

$$S_e(f) = S(f) * f_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_e).$$

Etant donné que l'impulsion de Dirac est un élément neutre de la convolution, il vient :

$$S_e(f) = f_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f - kf_e).$$

Ce résultat est montré dans la figure (4). Comme l'illustre cette figure, l'opération d'échantillonnage entraîne la répétition (la périodisation) du spectre du signal original. La période de répétition dans le domaine spectral (fréquentiel) est égale à la fréquence d'échantillonnage f_e .

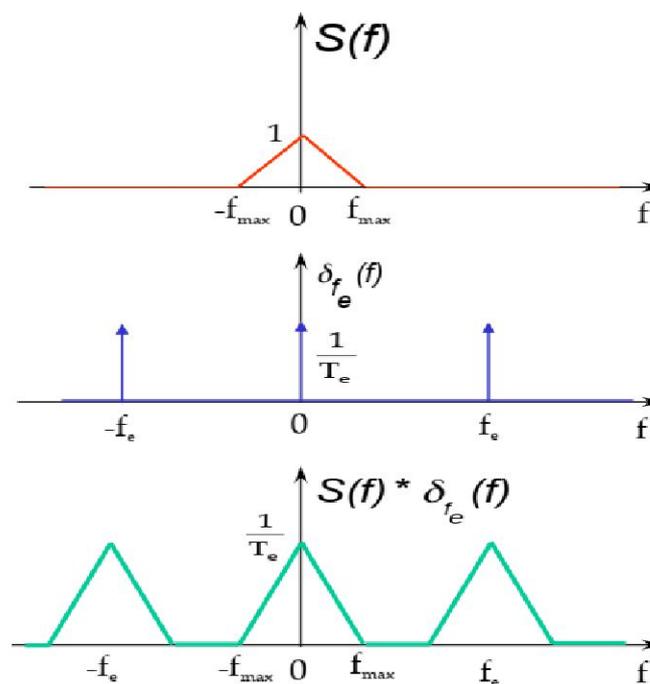


Figure.4. Périodisation du spectre causée par l'échantillonnage

Théorème de Shannon

Pour avoir une répétition périodique sans déformation du motif principal, il faut et il suffit que f_e , la fréquence d'échantillonnage, soit supérieure ou égale à deux fois la fréquence maximale (Voir les figures (5) et (7)).

$$f_e \geq 2f_{max}.$$

Si f_e est une fréquence fixe, $\frac{f_e}{2}$ est appelée fréquence de Shannon ou Nyquist ou encore fréquence de repliement.

$\frac{f_e}{2}$ représente la fréquence maximale admissible dans le spectre du signal original afin d'éviter les distorsions du spectre du signal échantillonné (Repliement spectral - Voir la figure (7)).

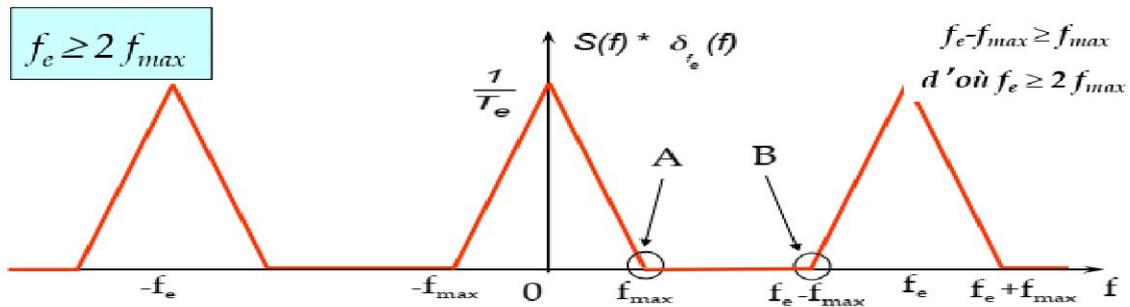


Figure.5. Limites fréquentielles permettant d'éviter le repliement spectral

Extraction du signal original à partir du signal échantillonné

Supposons que la condition de Shannon est remplie. Dans ce cas, le spectre de base $S_{e0}(f)$ (triangle central de la figure (5)) peut être facilement isolé en utilisant un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $\frac{f_e}{2}$ comme le montre la figure (6).

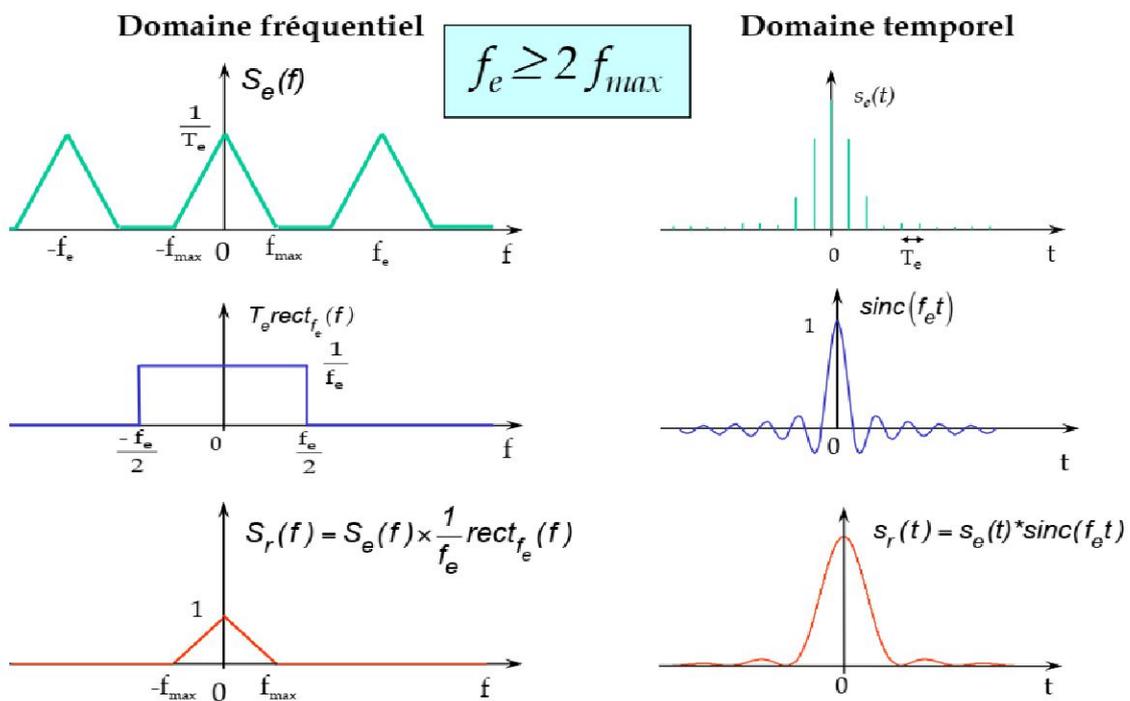


Figure.6. Restitution du signal original

On peut donc exprimer le spectre de base $S_{e0}(f)$ comme suit :

$$S_{e0}(f) = S_e(f) \cdot \text{rect}_{f_e}(f).$$

Avec : $\text{rect}_{f_e}(f)$ est la réponse en fréquence du filtre passe-bas utilisé pour restituer le signal original.

En prenant la TF^{-1} de $S_{e0}(f)$, on obtient :

$$s_{e0}(t) = TF^{-1}[S_{e0}(f)] = TF^{-1}[S_e(f) \cdot \text{rect}_{f_e}(f)] = TF^{-1}[S_e(f)] * TF^{-1}[\text{rect}_{f_e}(f)]. \rightarrow$$

$$s_{e0}(t) = s_e(t) * f_e \text{sinc}(\pi f_e t) = f_e s_e(t) * \frac{\sin(\pi f_e t)}{\pi f_e t}$$

En remplaçant $s_e(t)$ par son équation, on arrive à :

$$s_{e0}(t) = f_e \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_e) \cdot \delta(t - nT_e) * \frac{\sin(\pi f_e t)}{\pi f_e t} \right]. \text{ D'où :}$$

$$s_{e0}(t) = f_e \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_e) \frac{\sin(\pi f_e(t-nT_e))}{\pi f_e(t-nT_e)} \right]. \rightarrow$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_e) \frac{\sin(\pi f_e(t-nT_e))}{\pi f_e(t-nT_e)}$$

Cette dernière somme permet de restituer exactement le signal original. De ce fait, on peut dire que l'échantillonnage idéal conserve la totalité de l'information contenue dans le signal.

Phénomène de repliement de spectre

Dans le cas où $f_e < 2f_{max}$, il y a donc un phénomène de recouvrement de spectre. Le filtre passe-bas idéal qui permettrait de récupérer le spectre de base identique au spectre du signal initial, ne peut plus agir efficacement dans ces conditions. La figure (7) illustre le phénomène de chevauchement spectral et donc le spectre résultant.

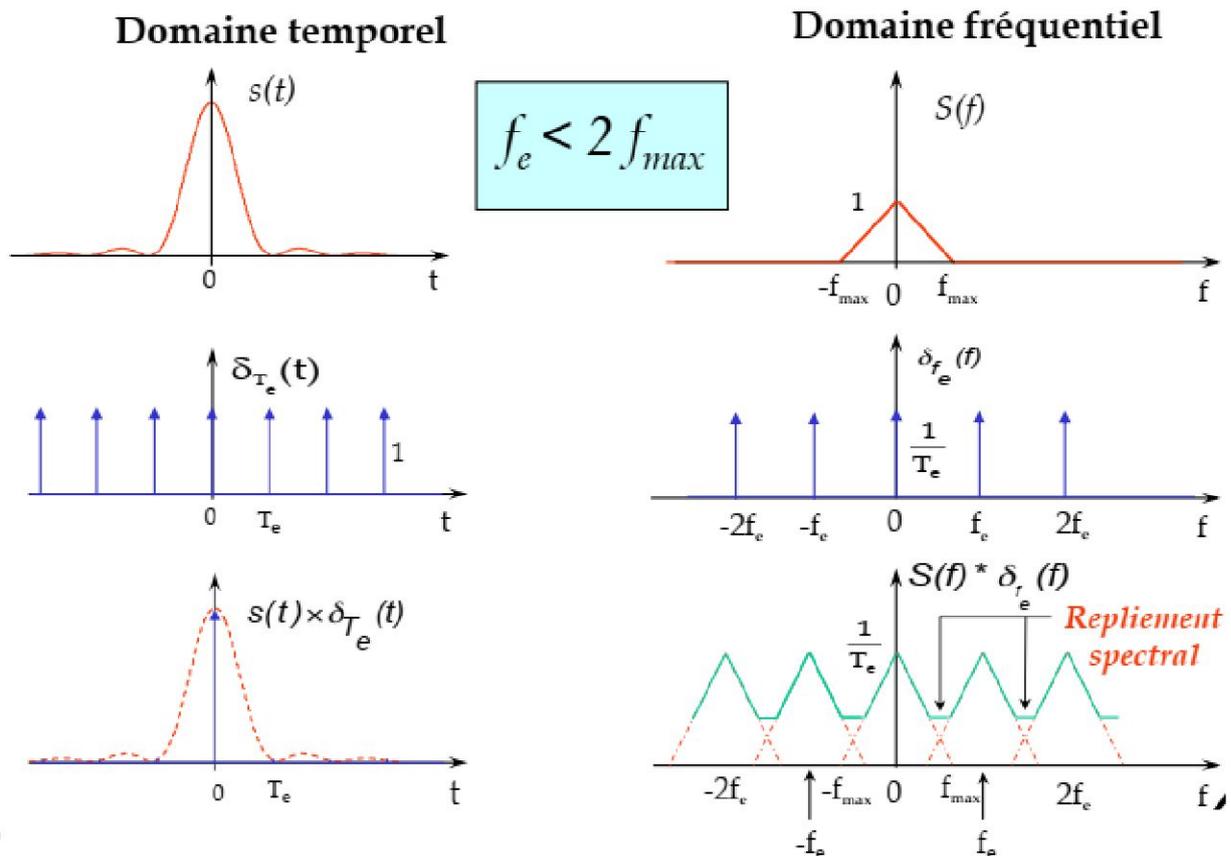


Figure.7. Phénomène de chevauchement spectral

À partir de cette figure, il est clair qu'une fréquence située dans la zone de repliement et susceptible d'appartenir à la fois au spectre de base du signal initial et à son spectre images décalé de $\mp f_e$.

Dans ces conditions, nous avons :

- La reconstruction exacte n'est plus possible ;
- Il y a repliement de spectre ;
- Les fréquences supérieures à $\frac{f_e}{2}$ sont ramenées dans la bande $\left[-\frac{f_e}{2}, \frac{f_e}{2}\right]$.

Prenons par exemple le signal de la forme sinusoïdale composé de seulement quatre points tel que montré à la figure (8). Il existe une infinité de signaux sinusoïdaux qui peuvent passer par ces points. C'est ce qu'on appelle le repliement du spectre, ou aliasing en anglais. La Figure (9) montre un exemple de repliement avec trois exemples de signaux qui pourraient passer par les points échantillonnés.

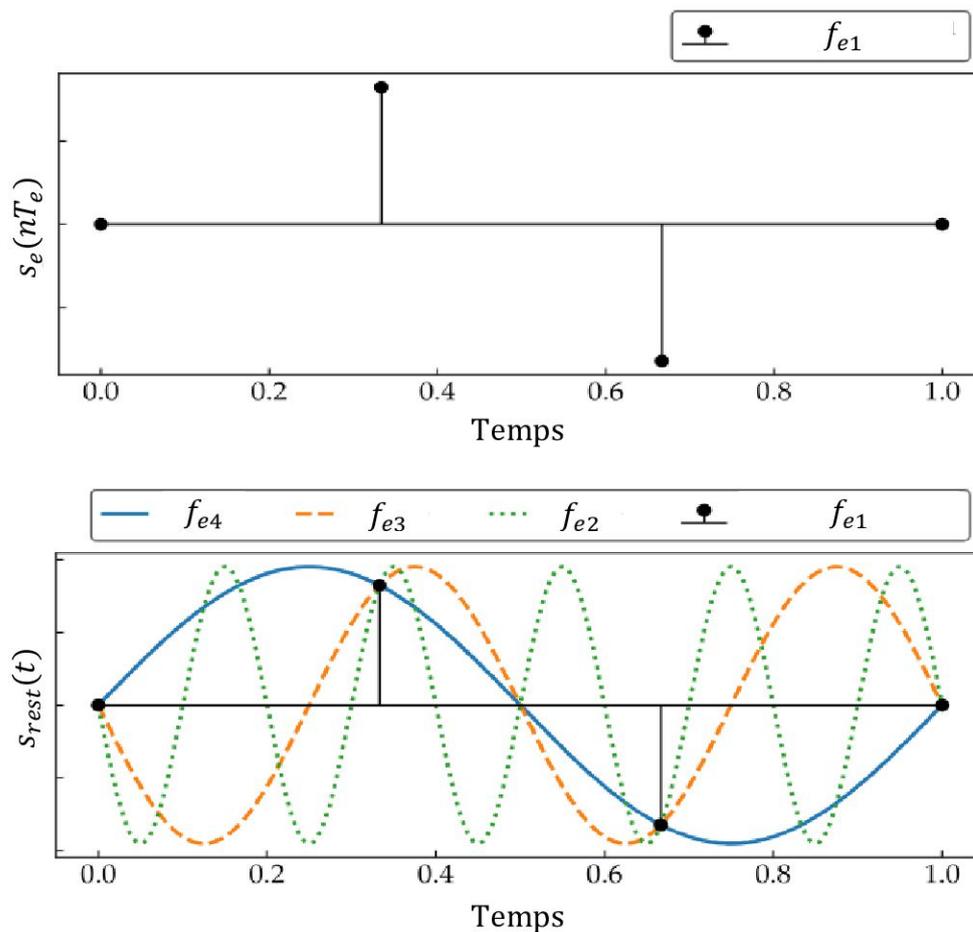


Figure.8. Exemple de repliement avec trois exemples de signaux

Filtre anti-repliement

En pratique, il est indispensable de faire précéder l'opération d'échantillonnage par un filtre passe-bas appelé filtre anti-repliement. Ce filtre doit avoir une fréquence de coupure f_c un peu inférieure à la fréquence de Nyquist $\frac{f_e}{2}$. La chaîne pratique de numérisation d'un signal analogique est donc constituée des éléments montrés dans la figure (9).

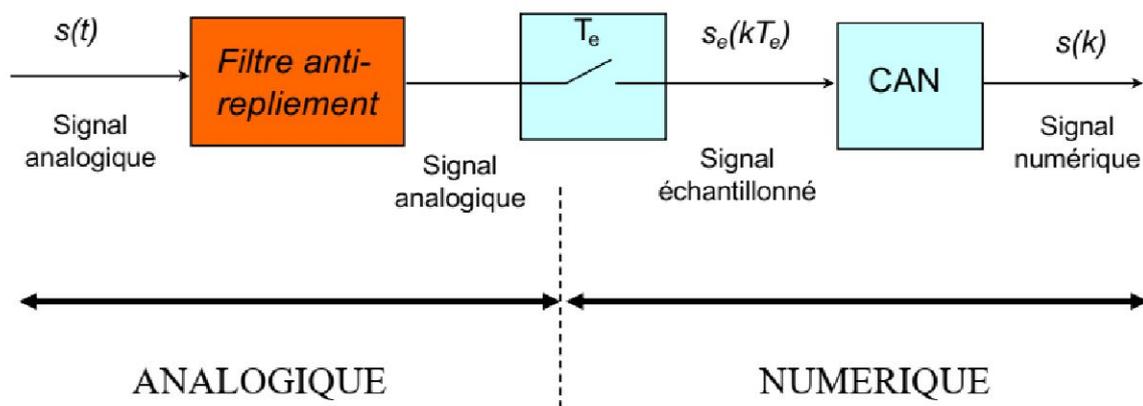


Figure.9. Chaîne pratique de numérisation d'un signal analogique

Différents types d'échantillonnage

Pratiquement, il est impossible d'obtenir des échantillons de durées quasiment nulles (Un train d'impulsions de Dirac). Chaque impulsion va avoir une durée très courte τ comme le montre la figure (10).

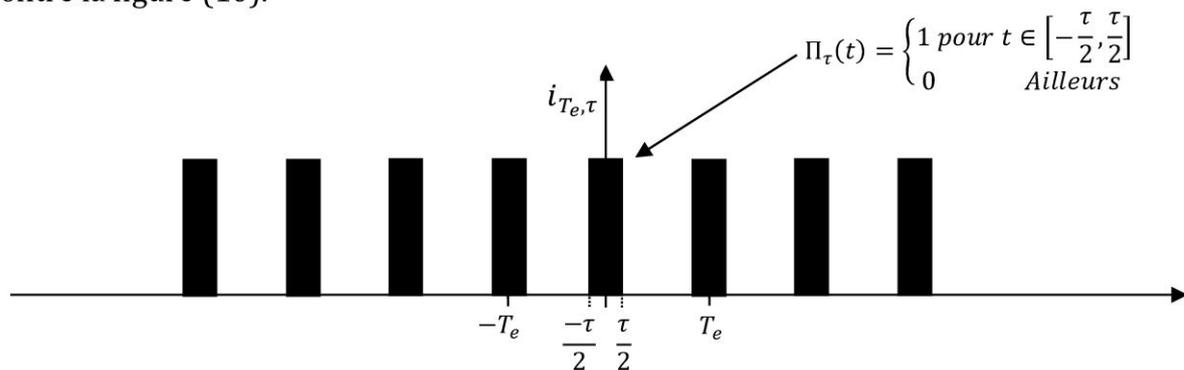


Figure.10. Train d'impulsions rectangulaires

En utilisant le train d'impulsions rectangulaires $i_{T_e, \tau}(t)$, on peut réaliser différents types d'échantillonnage notamment :

- L'échantillonnage naturel : d'amplitude égal à $s(t)$ dans l'intervalle τ ;
- L'échantillonnage régulier : d'amplitude égal à $s(nT_e)$ dans l'intervalle τ ;
- L'échantillonnage moyennneur : d'amplitude égal à la moyenne de $s(t)$ dans l'intervalle τ .

Ces trois types d'échantillonnage sont montrés dans la figure (11).

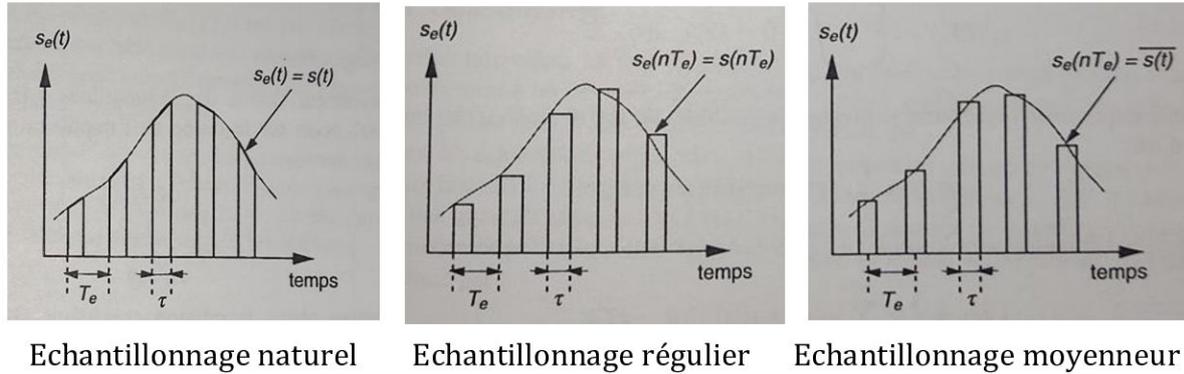


Figure.11. Différents types d'échantillonnage

La fonction porte périodique $i_{T_e, \tau}(t)$, utilisée pour réaliser ces types, est donnée par :

$$i_{T_e, \tau}(t) = \prod_{\tau}(t) * \delta_{T_e}(t) = \prod_{\tau}(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \prod_{\tau}(t - nT_e).$$

Dans ce qui suit, seront présentés ces trois types d'échantillonnage.

Echantillonnage naturel

Dans l'échantillonnage naturel, l'amplitude de chaque impulsion de $s_e(t)$ suit la valeur de la fonction $s(t)$ dans l'intervalle τ de l'impulsion.

Ce type d'échantillonnage n'est pas pratiquement réalisable, il constitue uniquement une étape de calcul intermédiaire nécessaire à la compréhension des autres types qui sont effectivement réalisés et utilisés. Pour ce type d'échantillonnage, $s_e(t)$ est donné par :

$$s_e(t) = s(t) \cdot i_{T_e, \tau}(t) = s(t) \cdot [\prod_{\tau}(t) * \delta_{T_e}(t)] = s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \prod_{\tau}(t - nT_e).$$

La TF de $s_e(t)$ est donnée par :

$$S_e(f) = TF[s(t) \cdot i_{T_e, \tau}(t)] = TF[s(t) \cdot [\prod_{\tau}(t) * \delta_{T_e}(t)]] = S(f) * TF[\prod_{\tau}(t) * \delta_{T_e}(t)]. \rightarrow$$

$$S_e(f) = S(f) * (TF[\prod_{\tau}(t)] \cdot TF[\delta_{T_e}(t)]) = S(f) * \left(\tau \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau f} \cdot f_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_e) \right). \rightarrow$$

$$S_e(f) = S(f) * \tau f_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi\tau kf_e)}{\pi\tau kf_e} \delta(f - kf_e) = \tau f_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(f) * \left[\frac{\sin(\pi\tau kf_e)}{\pi\tau kf_e} \cdot \delta(f - kf_e) \right].$$

$$S_e(f) = \tau f_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi\tau kf_e)}{\pi\tau nk} [S(f) * \delta(f - kf_e)] = \tau f_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi\tau kf_e)}{\pi\tau kf_e} S(f - kf_e).$$

La relation qui lie le spectre de base du signal échantillonné $S_{e0}(f)$ et celui du signal $S(f)$ original est donnée par :

$$S_{e0}(f) = \tau f_e S(f).$$

$$\text{Avec : } \left. \frac{\sin(\pi \tau k f_e)}{\pi \tau k f_e} \right]_{\text{pour } k=0} = 1.$$

La relation de $S_{e0}(f)$ montre qu'il est possible de récupérer le signal initial par un simple filtrage passe-bas idéal. La relation entre les deux spectres montre que l'échantillonnage naturel n'introduit pas de déformation.

Echantillonnage régulier ou bloqueur

L'échantillonnage régulier se caractérise par le fait que l'amplitude de chaque impulsion est constante et égale à l'amplitude du signal initial au temps nT_e . Du point de vue mathématique, le signal échantillonné $s_e(t)$ est défini à partir d'une suite infinie de fonctions porte pondérées par la valeur du signal $s(t)$ à des instants de temps bien déterminés ; c'est-à-dire :

$$s_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_e) \cdot \Pi_{\tau}(t - nT_e). \rightarrow$$

$$s_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_e) \cdot (\Pi_{\tau}(t) * \delta(t - nT_e)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi_{\tau}(t) * [s(nT_e) \cdot \delta(t - nT_e)]. \rightarrow$$

$$s_e(t) = \Pi_{\tau}(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_e) \cdot \delta(t - nT_e). \rightarrow$$

$$s_e(t) = \Pi_{\tau}(t) * [s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e)] = \Pi_{\tau}(t) * [s(t) \cdot \delta_{T_e}(t)].$$

La TF de $s_e(t)$ est donnée par :

$$S_e(f) = \text{TF} \left[\Pi_{\tau}(t) * [s(t) \cdot \delta_{T_e}(t)] \right] = \tau \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \cdot (S(f) * f_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_e)). \rightarrow$$

$$S_e(f) = \tau f_e \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(f - kf_e).$$

La relation qui lie le spectre de base du signal échantillonné $S_{e0}(f)$ et celui du signal $S(f)$ original est donnée par :

$$S_{e0}(f) = \tau f_e \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} S(f).$$

D'après cette relation, on voit que l'amplitude du spectre de $S_{e0}(f)$ est modulée (en plus de la multiplication par τf_e) par la fonction $\text{sinc}(\pi \tau f) = \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f}$.

Ce type d'échantillonnage introduit donc une déformation par rapport à l'échantillonnage idéal ou naturel. Cette déformation reste petite tant que τ , la durée de l'impulsion rectangulaire, reste faible.

Echantillonnage moyenneur

Dans l'échantillonneur moyenneur, la valeur de l'échantillon $s_e(nT_e)$ correspond à la valeur moyenne de $s(t)$ prise sur la durée de l'impulsion τ . Mathématiquement l'échantillon $s_e(nT_e)$ est donné par :

$$s_e(nT_e) = \frac{1}{\tau} \int_{nT_e - \frac{\tau}{2}}^{nT_e + \frac{\tau}{2}} s(t) dt.$$

Avec la fonction porte, l'expression précédente peut s'écrire comme suit :

$$s_e(nT_e) = \frac{1}{\tau} \int_{nT_e - \frac{\tau}{2}}^{nT_e + \frac{\tau}{2}} \Pi_{\tau}(t - nT_e) \cdot s(t) dt.$$

Cette équation représente le produit de convolution entre $\Pi_{\tau}(t)$ et $s(t)$ au temps nT_e .

$$s_e(nT_e) = \frac{1}{\tau} (\Pi_{\tau}(t) * s(t)) \cdot \delta(t - nT_e). \rightarrow$$

Le signal échantillonné complet est donné par :

$$s_e(t) = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\Pi_{\tau}(t) * s(t)) \cdot \delta(t - nT_e). \rightarrow$$

$$s_e(t) = \frac{1}{\tau} (\Pi_{\tau}(t) * s(t)) \cdot \delta_{T_e}(t).$$

La TF de $s_e(t)$ est donnée par :

$$S_e(f) = \frac{1}{\tau} \text{TF}[(\Pi_{\tau}(t) * s(t)) \cdot \delta_{T_e}(t)] = \frac{1}{\tau} \text{TF}[(\Pi_{\tau}(t) * s(t))] * \text{TF}[\delta_{T_e}(t)]. \rightarrow$$

$$S_e(f) = \frac{1}{\tau} \cdot \left(\tau \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau f} \cdot S(f) \right) * f_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_e). \rightarrow$$

$$S_e(f) = f_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi\tau(f - kf_e))}{\pi\tau f(f - kf_e)} \cdot S(f - kf_e). \rightarrow$$

La relation qui lie le spectre de base du signal échantillonné $S_{e0}(f)$ et celui du signal $S(f)$ original est donnée par :

$$S_{e0}(f) = f_e \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau f} S(f).$$

Ce résultat est très proche de celui correspondant à l'échantillonnage régulier.

Il est important de noter que les échantillonnages bloqueur et moyenneur seront d'autant plus proche de l'échantillonnage idéal que la durée de l'impulsion d'échantillonnage τ sera très faible devant la période d'échantillonnage T_e .