Université de Mohamed BOUDIAF – Msila
Année universitaire 2023/2024
Département d'Electronique
Chapitre 2 – Partie 2 : Les systèmes linéaires discrets invariants dans le temps

Pr. Khaled ROUABAH

Matière : Traitement Avancé du signal 01 M1- Instrumentation

Transformée en Z

Définition

La transformée en z (TZ) est un outil mathématique utilisé pour convertir les équations aux différences des systèmes, utilisées dans le domaine temporel, en équations algébriques qui peuvent être utilisées dans le domaine des z.
Dans la discipline de traitement de signal, la TZ est utilisée dans l'analyse des systèmes LIT discrets.
La TZ, notée $X(z)$, d'une suite numérique $x(n)$ est définie par :

$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, z^{-n}$.

Où z est une variable complexe et $X(z)$ est une fonction complexe de cette variable. La TZ unilatérale est donnée par :

$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)\, z^{-n}$

Si $x(n)$ est une séquence causale ($x(n) = 0,\ \forall\, n < 0$), sa TZ unilatérale est égale à sa TZ bilatérale.
La représentation de z sous sa forme polaire donne :
$z = re^{j2\pi f}$ ➔
$X\left(re^{j2\pi f}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\left(re^{j2\pi f}\right)^{-n}$ ➔
$X\left(re^{j2\pi f}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, r^{-n} e^{-j2\pi fn}$.

Pour une séquence donnée, les valeurs de z pour lesquelles la TZ converge constituent le domaine de convergence (DC) de cette séquence.
X(z) converge si $x(n)r^{-n}$ est absolument sommable. C'est-à-dire :

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, r^{-n} < \infty$.

En général, pour les séquences exponentielles, l'expression de la TZ est convergente dans un domaine défini par une couronne de rayon inférieur R^- et de rayon extérieur R^+ ➔

$0 \leq R^- < |z| \leq R^+ \leq +\infty$.

On définit par zéro de la TZ, la valeur z_0 pour laquelle $X(z_0) = 0$.
On définit par pôle de la TZ, la valeur p pour laquelle $\lim_{z \to p} X(z) = \infty$.

Calcul du Domaine de convergence de la TZ

Comme le montre la figure (1), le DC d'une fonction $X(z)$ est une couronne du plan complexe définie par :

$R^- < |z| < R^+$.

Avec :

$R^- = R_1 = \lim_{n\to\infty} |x(n)|^{\frac{1}{n}}.$

$R^+ = R_2 = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} |x(-n)|^{\frac{1}{n}}}.$

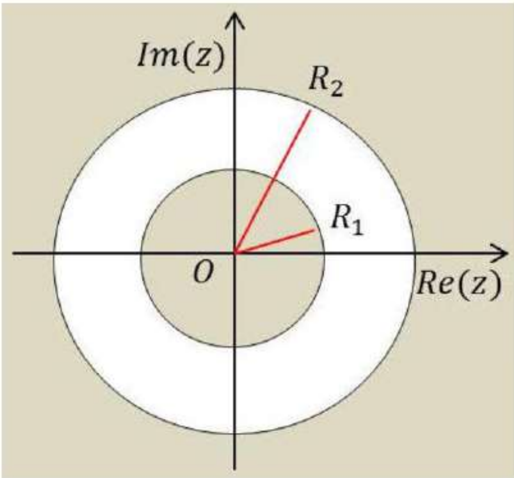

Figure.1. Domaine de convergence de la TZ

Exemple de calcul du domaine de convergence

Soit à calculer le DC de la séquence $x(n)$ donnée par :

$x(n) = a^n, n \in]-\infty, +\infty[$ et $0 < a < 1.$

Solution :

En utilisant les formules de R^- et R^+précédentes, on arrive à :

$$R^- = \lim_{n\to\infty} |x(n)|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} |a^n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left|a^{\frac{n}{n}}\right| = a.$$

$$R^+ = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} |x(-n)|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} |a^{-n}|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{a^n}\right|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{a^{\frac{n}{n}}}\right|} = a.$$

$R^- = R^+$ ➔ Il n'y a pas de DC de $x(n)$, sa TZ n'existe pas.

Exemple de calcul de transformée en z

Déterminer la TZ de la séquence $x(n)$ donnée par :

$$x(n) = \begin{cases} \frac{-1}{2^n}, \forall n > 0 \\ 0, Ailleurs \end{cases}.$$

Solution :

Le DC de cette séquence est donné par :

$$R^- = \lim_{n\to\infty} |x(n)|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{-1}{2^n}\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{2^{\frac{n}{n}}}\right| = \frac{1}{2}.$$

$$R^+ = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}|x(-n)|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{-1}{2^{-n}}\right|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2^{-\frac{n}{n}}}\right|^{\frac{1}{n}}} = +\infty.$$

En utilisant la formule de calcul de la TZ, on trouve :

$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, z^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{2^n} z^{-n} = -\sum_{n=1}^{+\infty}(2z)^{-n}$ ➔

$X(z) = 1 - 1 - \sum_{n=1}^{+\infty}(2z)^{-n} = 1 - (2z)^{-n}|_{n=0} - \sum_{n=1}^{+\infty}(2z)^{-n}$. ➔

$X(z) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty}(2z)^{-n}$. ➔

$X(z) = 1 - \frac{1}{1-(2z)^{-1}} = \frac{1+(2z)^{-1}-1}{1-(2z)^{-1}} = \frac{1}{1-2z}$.

Calcul du Domaine de convergence des séquences de durées finies

Pour une telle séquence, nous avons :

$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)\, z^{-n}$.

Où :

n_1 et n_2 sont deux nombres entiers finis positifs ou négatifs.

$X(z)$ converge pour toutes les valeurs de z, sauf éventuellement pour $z = 0$ et pour $|z| \to +\infty$.

Pour ces deux valeurs, on distingue trois cas :

1- Si n_1 et n_2 sont deux valeurs positives, alors $X(z)$ ne converge pas pour $z = 0$. En effet, pour $n > 0$, le terme z^{-n} diverge pour $z = 0$;
2- Si n_1 est une valeur négative et n_2 est une valeur positive, alors $X(z)$ diverge pour $z = 0$ et $|z| \to +\infty$;
3- Si n_1 et n_2 sont deux valeurs négatives, alors $X(z)$ ne converge pas pour $z = 0$. En effet, pour $n > 0$, le terme z^{-n} diverge pour $|z| \to +\infty$.

Propriétés de la transformée en z

Considérons les séquences numériques $x(n)$, $y(n)$ et $g(n)$. Soient $X(z)$, $Y(z)$ et $G(z)$ les TZ de ces trois séquences dans les DC D_x, D_y et D_g. Dans ce qui suit, seront données les propriétés de la TZ.

Linéarité

La transformée en z d'une combinaison linéaire de signaux est égale à la combinaison linéaire des transformées en z des signaux respectifs. Soit :

$TZ[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z)$.

Théorème du Retard

La TZ d'un signal discret, retardé (translaté en avant) de n_0 échantillons, est donnée par la TZ du signal non-retardé multipliée par z^{-n_0}. Soit :

$TZ[x(n - n_0)] = X(z)z^{-n_0}$.

Cette propriété est fondamentale et offre en particulier l'opérateur "retard d'une période d'échantillonnage", indispensable dans le traitement numérique des signaux. Cette opération est symbolisée par le schéma suivant :

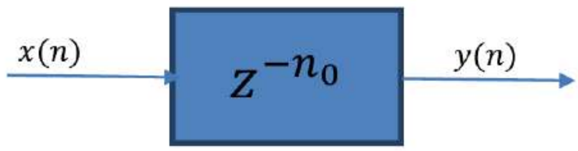

Figure 2 Théorème du retard

z^{-1} est le retard unité.

Translation arrière (signal avancé)

La TZ d'un signal discret, avancé (translaté en arrière) de n_0 échantillons, est donnée par la TZ du signal non-avancé multipliée par z^{+n_0}. Soit :

$TZ[x(n+n_0)] = X(z)z^{+n_0}$.

Théorème de changement d'échelle

Si pour les deux séquences $x(n)$ et $y(n)$ précédentes, nous avons :

$y(n) = a^n x(n)$.

Alors, la TZ de $y(n)$ est donnée par :

$Y(z) = X\left(\frac{z}{a}\right)$.

Dérivation de la Transformée en z

La dérivée de $X(z)$ par rapport à z est donnée par :

$\frac{dX(z)}{dz} = -\frac{1}{z} TZ[n \cdot x(n)]$.

Transformée en z de la conjugaison complexe

Si pour les deux séquences $x(n)$ et $y(n)$ précédentes, nous avons :
$y(n) = x^*(n)$. Le symbole '$*$' symbolise le conjugué.
Alors, le TZ de $y(n)$ est donnée par :

$Y(z) = TZ[x^*(n)] = X^*(z^*)$.

Théorème de la valeur initiale

Pour un signal $x(n)$ causal, nous avons :

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z).$$

Si cette limite existe bien sûr.

Théorème de la valeur finale

Soit $x(n)$ un signal causal discret. Si ces limites existent, on a :

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(z-1)\,X(z).$$

Les deux formules caractérisant la valeur initiale et la valeur finale sont utiles pour prendre en compte les conditions initiales et pour étudier la tendance à long terme d'un phénomène.

Transformée en z du produit de convolution

Si pour les trois séquences $x(n)$, $y(n)$ et $g(n)$ précédentes, nous avons :
$g(n) = x(n) * y(n)$. Ici, le symbole '$*$' symbolise la convolution.
Le DC de $G(z)$ est donné par : $D_g = D_x \cap D_y$.
Le produit de convolution, dans le domaine temporel, se traduit par un produit normal dans le domaine des z. soit, pour l'expression précédente :

$$g(n) = x(n) * y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)y(n-m).$$

La TZ de $g(n)$ est donnée par :

$$G(z) = TZ[g(n)] = TZ[x(n) * y(n)] = TZ[x(n)] \cdot TZ[y(n)].$$ ➔

$$G(z) = X(z) \cdot Y(z).$$

Transformée en z de la fonction de corrélation

La fonction de corrélation $c_{xy}(m)$ de deux signaux $x(n)$ et $y(n)$ est donnée par :

$$c_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y(n-l).$$

La TZ de $c_{xy}(m)$ est donnée par :

$$C_{xy}(z) = TZ\left[c_{xy}\right] = X(z^{-1}) \cdot Y(z).$$

Transformée en z des suites de références

Dans ce qui suit, nous présentons la TZ de quelques suites de références.

Impulsion de Dirac (impulsion unité discrète)

L'impulsion unité discrète (ou impulsion de Dirac en analogique) est le signal discret causal défini par :

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & pour\ n = 0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}.$$

La TZ de l'impulsion unité discrète est donnée par :

$$TZ[\delta(n)] = 1.$$

Cette TZ est définie pour tout z tel que z≠0.

Échelon unité discret

L'échelon unité discret est le signal discret causal défini par :

$$u(n) = \begin{cases} 1 & pour\ n \geq 0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}.$$

La TZ de l'échelon unité discret est donnée par :

$$TZ[u(n)] = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}.$$

Cette TZ est définie pour tout z tel que $|z| < 1$.

Rampe causale discrète

La rampe causale discrète est le signal discret causal défini par :

$$r(n) = \begin{cases} n & pour\ n \geq 0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}.$$

La TZ de la rampe causale discrète est donnée par :

$$TZ[r(n)] = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Cette TZ est définie pour tout z tel que $|z| < 1$.

Signal causal exponentiel discret

Le signal causal exponentiel discret est le signal discret causal défini par :

$$e(n) = \begin{cases} a^n & pour\ n \geq 0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}.$$

La TZ de cet exponentiel est donnée par :

$$TZ[e(n)] = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}.$$

Cette TZ est définie pour tout z tel que $|z| < |a|$.

Transformée en z inverse

La TZ inverse d'une fonction $X(z)$ consiste à retrouver la séquence $x(n)$. Elle peut être calculée de différentes manières notamment :

1- La méthode des résidus ;
2- Le développement en série de Taylor par rapport à z^{-1} ;
3- La décomposition en fractions élémentaires ;
4- La division de polynômes.

Dans ce cours, on va présenter uniquement la méthode des résidus. Par conséquent, les autres méthodes seront présentées sous formes d'exercices dans les séances de TD.

Calcul de transformée en z inverse par la méthode des résidus

Par l'application du théorème de Cauchy, la TZ^{-1} est donnée par :

$$x(n) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz.$$

Le contour Γ doit être dans la région de convergence de la série. Il doit être fermé et il doit entourer l'origine du plan z dans le sens positif (sens inverse des aiguilles d'une montre).

L'intégration directe par les résidus donne :

$$x(n) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz = \sum résidus\ de\ X(z) z^{n-1}\ dans\ \Gamma.$$

Le résidu, à un pôle z=a, d'ordre 1 de la fonction '$X(z)z^{n-1}$' est donné par :

$$Res_a^1 = \lim_{z\to a} [(z-a) X(z) z^{n-1}].$$

Le résidu, à un pôle z=a, d'ordre m de la fonction '$X(z)z^{n-1}$' est donné par :

$$Res_a^m = \lim_{z\to a} \left[\frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-a)^m X(z) z^{n-1}\right)\right].$$

Ainsi, en calculant tous les résidus aux pôles de la fonction '$X(z)z^{n-1}$', on obtient $x(n)$.