Système Discret

- Un système à temps discret fonctionne sur une entrée de signal à temps discret et produit une sortie de signal à temps discret ;
- Il existe de nombreux exemples de systèmes à temps discret utiles dans le traitement du signal numérique, tels que les filtres numériques pour les images ou le son ;
- La classe des systèmes à temps discret LIT présente un intérêt particulier car les propriétés de linéarité et d'invariance temporelle permettent l'utilisation de certains outils importants du traitement du signal.

Avantages du numérique

- ✓ Reproductibilité ;
- ✓ Souplesse (changement de coefficients) ;
- ✓ Insensibilité au bruit ;
- ✓ Stabilité des caractéristiques avec le temps, la T°, etc.

Système SLIT

- Soit le système Linéaire Invariant dans le Temps (LIT) de la figure ci-dessous.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

- La réponse $y[n]$ à ce système, de réponse impulsionnelle $h[n]$, pour l'entrée $x[n]$, est donnée par :

$y[n] = x[n] * h[n]$.

Ce système est LIT si :

$$ax_1[n] + bx_2[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow ay_1[n] + by_2[n]$$

$$x[n-n_0] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n-n_0]$$

Un système peut être caractérisé par sa réponse impulsionnelle. Si on connait la réponse impulsionnelle d'un système, alors on connait sa sortie pour n'importe quelle entrée.

Produit de convolution normal des signaux discrets

La convolution permet de calculer la sortie d'un système étant donnés l'entrée et la réponse impulsionnelle.

On peut représenter un signal discret comme une somme d'impulsions comme le montre la figure (1).

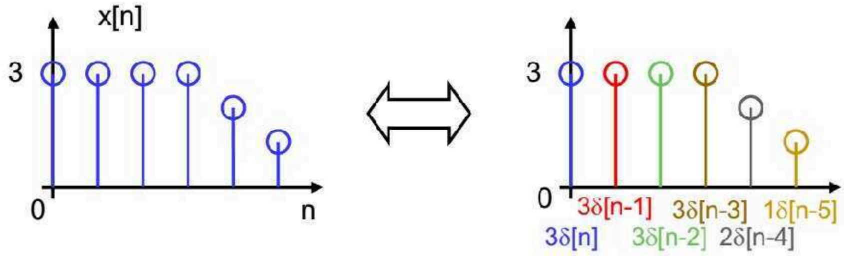


Figure.1. Représentation d'un signal discret

D'après cette figure, nous avons :

$x[n\,] = 3\delta[n] + 3\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + 2\delta[n-4] + \delta[n-5]$

De façon générale :

$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\delta[n-m]$.

Par superposition, la sortie $y[n]$ d'un système est la somme des réponses impulsionnelles correspondant aux entrées $x[n]$ comme le montre la figure (2).

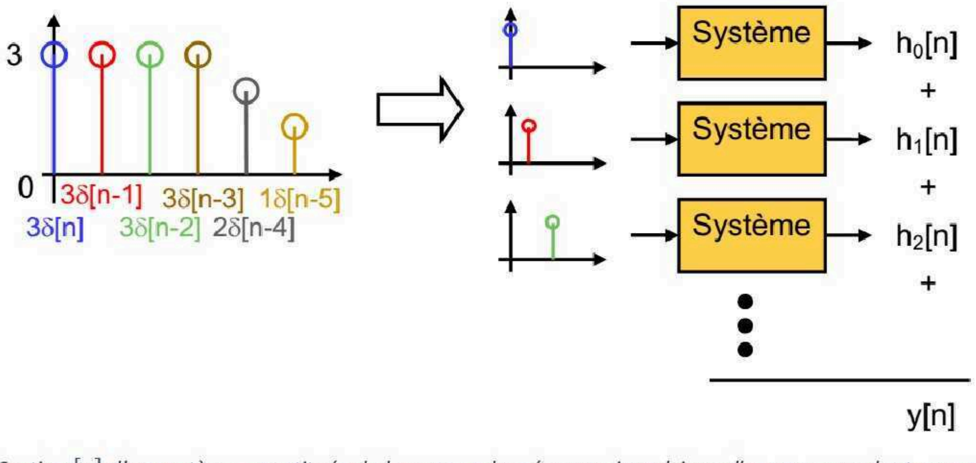


Figure.2. Sortie $y[n]$ d'un système, constituée de la somme des réponses impulsionnelles correspondant aux entrées $x[n]$

D'après cette figure, la convolution peut être donnée comme suit :

$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]h[n-m]$.

- ⇨ $h[n-m]$ est obtenue à partir de $h[m]$ par un rabattement autour de l'axe $m = 0$ suivi d'une translation n.
- ⇨ La convolution est donc une méthode pour combiner deux signaux et en produire un troisième. C'est la technique la plus importante en traitement de signaux.

Propriétés de la convolution

La convolution discrète possède les mêmes propriétés que la convolution continue. En effet, la convolution discrète est commutative, associative et distributive.

- ⇨ Pour la propriété de commutativité, nous avons :

$a[n] * b[n] = b[n] * a[n]$;

- ⇨ Pour la propriété d'associativité, nous avons :

$(a[n] * b[n]) * c[n] = a[n] * (b[n] * c[n])$

- ⇨ Pour la propriété de distribution, nous avons :

$a[n] * b[n] + a[n] * c[n] = a[n] * (b[n] + c[n])$

Elément neutre – Convolution avec une impulsion de Dirac

La convolution avec une impulsion unité est donnée par :

$x[n] * \delta[n] = x[n]$.

Pour un décalage dans le temps, comme le montre la figure (3), nous avons :

$x[n] * \delta[n - N1] = x[n - N_1]$.

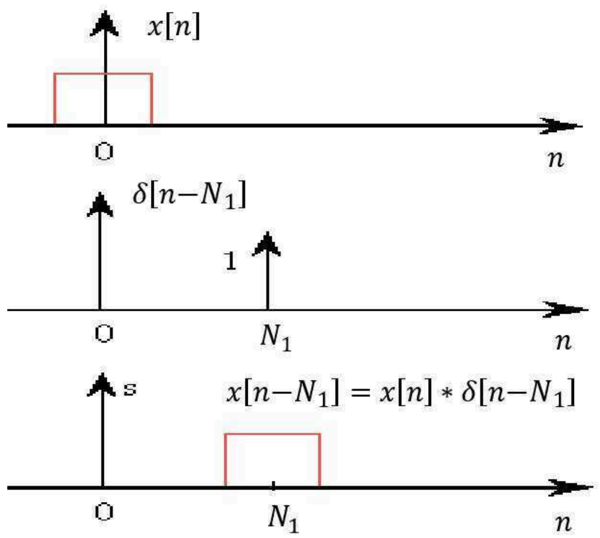


Figure.3. Utilisation de l'impulsion unité pour un décalage de N_1 échantillons

Produit de convolution circulaire

Le résultat de la convolution circulaire peut être utilisé pour calculer la convolution linéaire de deux signaux discrets, de durées finies, de la forme :

$x_1[n] \neq 0$ pour $n = 0,1,2,\ldots,N_1 - 1.$
$x_2[n] \neq 0$ pour $n = 0,1,2,\ldots,N_2 - 1.$

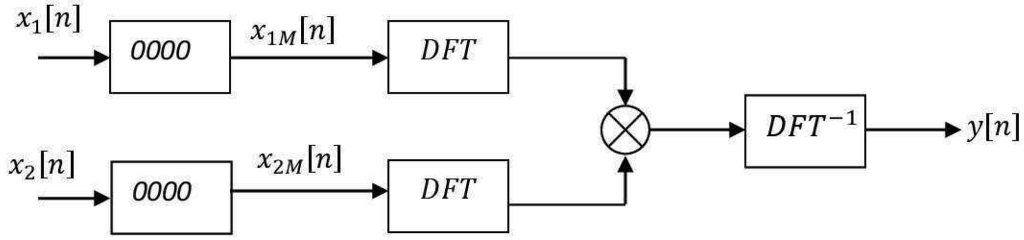
Cette convolution est donnée par :

$y[n] = x_1[n] \otimes x_2[n].$

Pour effectuer cette opération, on procède de la manière suivante :

a) A partir de $x_1[n]$ et $x_2[n]$, construire deux séquences $x_{1M}[n]$ et $x_{2M}[n]$ ayant M échantillons chacune. M est égal à la somme des nombres des échantillons des deux séquences ;
b) Calculer la DFT (Discrete Fourier Transform) de chaque séquence ;
c) Calculer la DFT^{-1} du produit des deux DFTs ;

Ces trois étapes peuvent être représentées par le schéma de la figure ci-dessous :



Réponse impulsionnelle d'un système

- ⇨ Comme nous l'avons vu plus haut, la réponse impulsionnelle d'un système discret est sa réponse (sortie) à une entrée sous forme d'impulsion de Dirac $\delta(n)$. Elle est donnée par :

$y(n) = x(n) * h(n) = \delta(n) * h(n) = h(n).$

- ⇨ Elle est montrée dans la figure (4).

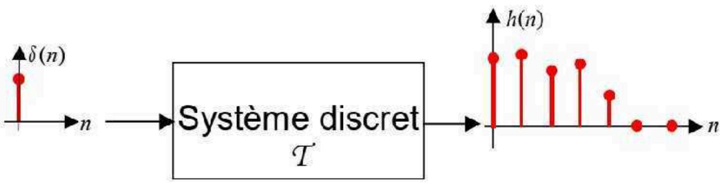


Figure.4. Réponse impulsionnelle d'un système

- ⇨ Cette réponse permet de caractériser complétement le système ;
- ⇨ Elle permet aussi le calcul de la sortie du système discret pour n'importe quelle entrée;
- ⇨ Ce calcul est effectué en utilisant la convolution linéaire de signaux discrets ;
- ⇨ La réponse d'un système discret LIT à une entrée quelconque $x[n]$ est la convolution linéaire de cette dernière avec la réponse impulsionnelle $h[n]$ du système ;
- ⇨ Un système discret LIT est causal ssi sa réponse impulsionnelle $h[n]$ est causale. Soit :

$h[n] = 0, \forall n < 0.$

Représentation des systèmes discrets par des équations aux différences

- ⇨ Il est souvent utile de décrire des systèmes à l'aide d'équations montrant la variation temporelle de l'entrée en fonction de la sortie ;
- ⇨ Pour les systèmes à temps discret, ces équations sont appelées équations aux différences, un type de relation de récurrence ;
- ⇨ Une classe importante d'équations aux différences est l'ensemble des équations aux différences à coefficients constants linéaires.
- ⇨ Pour un système, régi par une équation aux différences d'ordre N, nous avons :

$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r].$ ➔

$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} y[n-k] + \sum_{r=0}^{M} \frac{b_r}{a_0} x[n-r].$

- ⇨ En utilisant l'équation aux différences, on peut calculer la sortie du système $y(n)$ sans connaissance de la réponse impulsionnelle $h(n)$ **;**
- ⇨ A partir de cette équation, il est clair que $y(n)$ est fonction des N sorties décalées $y(n-k)$, des M entrées décalées $x(n-r)$ et de l'entrée courante $x(n)$;
- ⇨ Il est clair aussi que quelle que soit la longueur de la réponse impulsionnelle $h(n)$ (finie ou infinie), le nombre d'opérations nécessaires au calcul de $y(n)$ est fini ;

- ➢ Pour $a_0 = 1$ et $N = 0$, nous avons :

$y(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r].$

- ⇨ D'après cette équation, on remarque que $y(n)$ dépend de l'entrée courante $x(n)$ et des M entrées précédentes $x(n-r)$;
- ⇨ Le système régi par ce type d'équations est un système à **réponse non récursive** ➔ La réponse impulsionnelle est **finie** ;
- ⇨ On parle de système à **Réponse Impulsionnelle Finie** (**RIF**).

- ➢ Pour $a_0 = 1$ et $N \geq 1$, nous avons :

$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r].$

D'après la dernière équation, on remarque que $y(n)$ dépend de l'entrée courante $x(n)$, des M entrées précédentes $x(n-r)$ mais aussi des N sorties précédentes $y(n-k)$;

- ⇨ Le système régi par ce type d'équation est un système à **réponse récursive** ➔ La réponse impulsionnelle est infinie ;
- ⇨ On parle de système à **Réponse Impulsionnelle infinie** (**RII**).

Réponse fréquentielle

- ⇨ Soit un système LIT discret défini par sa réponse impulsionnelle $h(n)$. Rappelons que la réponse $y(n)$ est liée à l'entrée par l'équation de convolution suivante :

$$y(n) = h(n) * x(n).$$

- ⇨ Le calcul de la TF des deux termes de cette équation donne :

$$TF[y(n)] = \mathrm{TF}[h(n) * x(n)] = \mathrm{TF}[h(n)] \cdot \mathrm{TF}[x(n)]. \Rightarrow$$

$$Y(f) = H(f) * X(f).$$

Avec :

$$\begin{cases} x(n) \xleftrightarrow{TF} X(f) \\ X(f) \xleftrightarrow{TF^{-1}} x(n) \end{cases};$$

$$\begin{cases} y(n) \xleftrightarrow{TF} Y(f) \\ Y(f) \xleftrightarrow{TF^{-1}} y(n) \end{cases};$$

$$\begin{cases} h(n) \xleftrightarrow{TF} H(f) \\ H(f) \xleftrightarrow{TF^{-1}} h(n) \end{cases}.$$

- ⇨ $|H(f)|$, le module de $H(f)$, représente le spectre d'amplitude ;
- ⇨ $arg(H(f))$, l'argument $H(f)$, représente le spectre de phase.

Fonction de transfert

- ⇨ Pour le système LIT discret précédent, le calcul de la TZ des deux termes de la convolution donne :

$$TZ[y(n)] = \mathrm{TZ}[h(n) * x(n)] = \mathrm{TZ}[h(n)] \cdot \mathrm{TZ}[x(n)]. \Rightarrow$$

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z).$$

$$X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z)$$

⇨ Le calcul de la TZ des deux termes de l'équation aux différences donne :

$$TZ\left[\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]\right] = TZ\left[\sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r]\right].$$

⇨ En utilisant la propriété du décalage temporel de la TZ, on obtient :

$$Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}. \rightarrow$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}} = \frac{b_M z^{-M} + \cdots + b_1 z^{-1} + b_0}{a_N z^{-N} + \cdots + a_1 z^{-1} + a_0}.$$

⇨ D'après la dernière équation, on remarque que la fonction de transfert $H(z)$ a la forme d'une fraction rationnelle donnée par :

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}.$$

$N(z)$ et $D(z)$: polynômes en z^{-1} de degrés respectifs M pour les entrées et N pour les sorties. En fonction de la fonction de transfert, la réponse en fréquence est donnée par :

$$H(f) = H(z)]_{pour\ z=\exp(j2\pi f)}.$$

Pôles, zéros et stabilité d'un système discret

⇨ Les zéros d'un système, de fonction de transfert $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$, sont les racines du polynôme $N(z)$ (**Numérateur** de $H(z)$) ;

⇨ Les pôles $\lambda_i \in \mathbb{C}$ d'un système, de fonction de transfert $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$, sont les racines du polynôme $D(z)$ (**Dénominateur** de $H(z)$) ;

⇨ Un système linéaire discret est stable **ssi** sa fonction de transfert $H(z)$ converge sur le cercle unité. C'est-à-dire :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |h(n)| < \infty \rightarrow \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\} \in DC.$$

⇨ Le système est causal **ssi** le DC de $H(z)$ est l'extérieur d'un disque $\Rightarrow \lambda_i \in$ au disque ;

⇨ Un système discret **linéaire et causal** est stable ssi tous les pôles de $H(z)$ sont à l'intérieur du cercle unité (tous ses pôles pi ont un module inférieur à 1). Soit :

$$|\lambda_i| < 1.$$

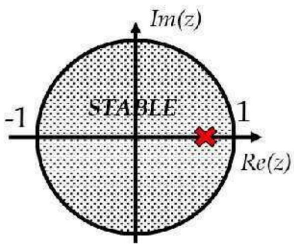


Figure.5. Pôle d'un système stable.