Université Mohamed Boudiaf - M'sila
Faculté des Sciences et Technologies
Département de Genie Civil

Cours de Probabilité-Statistiques
chapitre 3: Analyse combinatoire

Merini Abdelaziz*

15 novembre 2023

Table des matières

1 Analyse combinatoire

L'analyse combinatoire est la science du dénombrement, elle permet de déterminer le nombre de réalisations possible d'une expérience donnée. La connais-

*

sance de ces méthodes de dénombrement est indispensable au calcul élémentaire des probabilités.

1.1 Rappel

1.1.1 La notation factorielle

Définition 1. *Soit $n \in \mathbb{N}$., on appelle n factorielle, noté $n!$, le produit des nombres entiers de 1 à n.*

$$n! = \begin{cases} 1 \quad si\ n = 0 \\ n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 3 \times 2 \times 1 \quad si\ n > 0 \end{cases}$$

Exemple 1. $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. $6! = 6 \times 5! = 720$.
$0! = 1$.

Remarque 1. $\dfrac{n!}{(n-1)!} = n, \qquad n! = n \times (n-1)!$

1.2 Principe additif et principe multiplicatif

1.2.1 Notion de dénombrement

Définitions : • Un ensemble Ω est fini lorsqu'il admet un nombre fini d'éléments.

• Le nombre d'éléments de Ω est appelé le cardinal de l'ensemble et il est noté :

card(Ω) ou $|\Omega|$.

• Dénombrer, c'est compter le nombre d'éléments que contient un ensemble fini, c'est à dire en déterminer le cardinal.

Exemple 2. *Si Ω = { pille, face }, son cardinal est $card(\Omega) = 2$.*
- Si Ω= {1, 2, 3, 4, 5, 6}, $card(\Omega) = 6$.
Si Ω est l'ensemble des entiers, $card(\Omega) = +\infty$. $card(\phi) = 0$.
L'ensemble Ω des joueurs d'une équipe de foot est un ensemble fini. Alors $card(\Omega) = 11$.

Définition 2. *On dit que deux ensembles sont* ***disjoints****, s'ils n'ont aucun élément en commun.*

Le Principe additif **Propriété** (principe additif) : Soit Ω_1, Ω_2,...,Ω_p , p ensembles finis deux à deux disjoints.

Alors

$$card\,(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup ... \cup \Omega_p) = card\,(\Omega_1) + card\,(\Omega_2) + ... + card\,(\Omega_p)$$

Exemple 3. *Soient $\Omega_1 = \{a, b, c, d\}$ et $\Omega_2 = \{g, h, k\}$. Alors Ω_1 et Ω_2 sont disjoints et on a :*

$$card\,(\Omega_1 \cup \Omega_2) = card\,(\Omega_1) + card\,(\Omega_2) = 4 + 3 = 7.$$

Le Principe multiplicatif (PM) **Propriété** (principe additif) : Soit E une expérience qui comporte 2 étapes : la première qui a p résultats possibles et chacun de ces

résultats donne lieu a q résultats lors de la deuxième étape. Alors l'expérience E a $p \times q$ résultats possibles.

Exemple 4. *On lance successivement trois dés à 6 faces (une expérience globale).*

Combien y a-t-il d'issues possibles ? {(121 , 641 ,.......) }

Réponse :

Pour D_1, on a (6 chiffres distincts)

Pour D_2, on a (6 chiffres distincts)

Pour D_3, on a (6 chiffres distincts)

Selon le principe de décomposition (3 épreuves), le nombre d'issues possibles est de $6 \times 6 \times 6 = 216$..

Exemple 5. *Déterminer le nombre d'entiers positifs inférieurs à 10'000 qui peuvent être formés avec les chiffres 1, 2, 3 et 4*

a) si les répétitions sont permises ?

b) si elles ne sont pas permises ?

Réponse :

a) Pour un nombre à 4 chiffres on a :$4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ *nombres.*

$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
4 manières	*4 manières*	*4 manières*	*4 manières*

Pour un nombre à 3 chiffres on a : $4 \times 4 \times 4 = 64$ *nombres.*

$\times$	$\times$	$\times$
4 manières	*4 manières*	*4 manières*

Pour un nombre à 2 chiffres on a : $4 \times 4 = 16$ *nombres.*

$\times$	$\times$
4 manières	*4 manières*

Pour un nombre à 1 chiffre on a : 4 *nombres.*

$\times$
4 manières

Selon le principe de décomposition on a $256 + 64 + 16 + 4 = 340$*nombres.*

b) Pour un nombre à 4 chiffres on a :$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ *nombres.*

$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
4 manières	*3 manières*	*2 manières*	*1 manières*

Pour un nombre à 3 chiffres on a : $4 \times 3 \times 2 = 24$ *nombres.*

$\times$	$\times$	$\times$
4 manières	*3 manières*	*2 manières*

Pour un nombre à 2 chiffres on a : $4 \times 3 = 12$ *nombres.*

$\times$	$\times$
4 manières	*3 manières*

Pour un nombre à 1 chiffre on a : 4 *nombres.*

$\times$
4 manières

Selon le principe de décomposition on a $24 + 24 + 12 + 4 = 64$ *nombres.*

1.3 Permutations

1.3.1 Permutation simple

Définition 3. *Si on classe dans un ordre particulier n éléments distincts, on forme une permutation simple (de ces n éléments).*

Exemple 6. *Les permutations possibles des 3 lettres a, b, c sont : abc, bca, cab, bac, acb, cba.*

Proposition 1. *Le nombre de permutations à n éléments distincts est*

$$P_n = n!$$

Exemple 7. *Dans l'exemple 5, on a* $n = 3$, *donc* $P_3 = 3! = 6$.

1.3.2 permutation avec répétitions

Définition 4. *Si on classe dans un ordre particulier n éléments dont* n_1 *sont identiques de type* 1,
n_2 *sont identiques de type* $2, \ldots\ldots.., n_k$ *sont identiques de type* k, *on forme une permutation avec répétitions (de ces n éléments).*

Proposition 2. *Le nombre de permutations avec répétitions à n éléments distincts est*

$$\bar{P}_n\left(n_1, n_2, ..., n_k\right) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

Exemple 8. *Combien peut-on former de mots différents avec toutes les lettres du mot ≪ ERRER ≫*

Nous avons 5 lettres $(n = 5)$ *dont certaines sont semblables.*

la lettre "E" apparait deux fois donc $n_1 = 2$, *la lettre "R" apparait trois fois donc* $n_2 = 3$, *alors*

$$\bar{P}_5\left(2; 3\right) = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

RRREE, RRERE, RREER, RERRE, RERER, REERR, ERRRE, ERRER ; ERERR ; EERRR.

Remarque 2. *a)* $\bar{P}_n\left(n_1, n_2, ..., n_k\right) < P_n$.

b) La barre sur le P signifie "avec répétitions".

1.3.3 Permutation circulaire

Définition 5. *On appelle permutation circulaire de n éléments tout groupement ordonné de ces n objets, dans lequel on ne considère que la position des objets les uns par rapport aux autres.*

Proposition 3. *Le nombre de permutations circulaires de n objets est égal à*

$$(n-1)!$$

Exemple 9. *De combien de manières peut-on arranger 5 personnes a) sur une ligne ? b) Autour d'une table ronde ? Réponse : a) 5 !=120. b)(5-1) !=4 !=24.*

1.4 Arrangements

1.4.1 Arrangement simple

Définition 6. *Si, parmi n éléments distincts, on choisit r éléments distincts ($r \leq n$) en les classant dans un ordre particulier, on forme un arrangement simple (de r éléments choisis parmi n).*

Exemple 10. *Ensemble de 3 lettres $\{a, b, c\}$ Les groupes ab, ac, ba, ca, bc, cb forment des arrangements de 2 lettres distincts*

Proposition 4. *Le nombre d'arrangements simple de r éléments distincts parmi un ensemble de n objets distincts est*

$$\begin{aligned} A_n^r &= \frac{n!}{(n-r)!} \\ &= n\,(n-1)\ldots(n-r+1) \end{aligned}$$

Remarque 3. *Si $r = n$, on a $A_n^n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = P_n$, alors les permutations sont un cas particulier des arrangements.*

Exemple 11. *Avec les lettres du mot « RELATION », combien peut-on former, avec ou sans sens, de mots différents de 5 lettres ?*

Réponse : $n = 8$ et $r = 5$, c'est un arrangement simple $A_8^5 = \dfrac{8!}{(8-5)!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$ *mots possibles*

1.4.2 Arrangement avec répétitions (listes)

Définition 7. *Si, parmi n éléments distincts, on choisit r éléments distincts ou non (on peut choisir plusieurs fois le même) en les classant dans un ordre particulier, on forme un arrangement avec répétitions (de r éléments choisis parmi n).*

Proposition 5. *Le nombre d'arrangement avec répétition, notée $\bar{A}_n^r$ de r éléments choisis parmi les n éléments est*

$$\bar{A}_n^r = n^r$$

Remarque 4. *La barre sur le A signifie "avec répétitions".*

Exemple 12. *Combien de nombres de 3 chiffres peut-on former avec les chiffres 1 et 2 ?*

Réponse : $n = 2$, *c'est un arrangement avec répétitions* $\bar{A}_2^3 = 2^3 = 8$.

111, 112, 121, 211, 122, 222, 221,212.

Exemple 13. *Combien de nombres de deux chiffres peut-on former avec les chiffres 5, 6, 7, 8, 9 ?*

Réponse : $n = 5$, $r = 2$, *c'est un arrangement avec répétitions* $\bar{A}_5^2 = 5^2 = 25$.

1.5 Combinaison

1.5.1 Combinaison simple

Définition 8. *Si, parmi n éléments distincts, on choisit r éléments distincts* $(r \leq n)$ *sans les classer dans un ordre particulier, on forme une combinaison simple (de r éléments choisis parmi n).*

Autrement dit : une combinaison est un arrangement dans lequel l'ordre ne compte pas..

Exemple 14. *Quatre personnes* $\{1; 2; 3; 4\}$ *désirent jouer au tennis de table en double. Combien d'équipes différentes peuvent-elles former ?*

Réponse : c'est une combinaison simple : $\{1; 2\}, \{3; 4\}, \{1; 3\}, \{2; 4\}, \{1; 4\}, \{2 : 3\}$, *on peut former 6 équipes.*

Proposition 6. *Le nombre de combinaisons simples de r éléments distincts pris parmi n éléments, distincts notée* C_n^r *est*

$$\begin{aligned} C_n^r &= \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \\ &= \frac{A_n^r}{r!} \end{aligned}$$

Remarque 5. *1)On note aussi* $C_n^r = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$.

2) $C_n^r \leq A_n^r$

Exemple 15. *De combien de manières différentes peut-on former un comité de 3 personnes à partir d'une classe de 24 élèves ?*

Réponse : c'est une combinaison simple, alors

$$C_{24}^3 = \frac{24!}{3!\,(24-3)!} = \frac{24!}{3!21!} = \frac{24 \times 23 \times 22}{6} = 2024.$$

Propriétés

1) $C_n^0 = C_n^n = 1 \quad , C_n^r = C_n^{n-r}$ (formule de symétrie)
2) $C_n^1 = n$.
3) $C_{n+1}^{r+1} = C_n^r + C_n^{r+1}$ (Triangle de Pascal).
4) $\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$

Démonstration. exercice. □

Exemple 16. $C_3^0 = \dfrac{3!}{0!\,(3-0)!} = 1$; $C_3^3 = 1$; $C_3^2 = C_3^1 = 3$

1.5.2 Trianlge de Pascal

La relation $C_{n+1}^{r+1} = C_n^r + C_n^{r+1}$

permet une determination pratique de proche en proche des differents coefficients C_n^r au moyen du triangle de Pascal.

Si $r > n$, on pose $C_n^r = 0$

$n \backslash r$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

1.5.3 Binôme de Newton

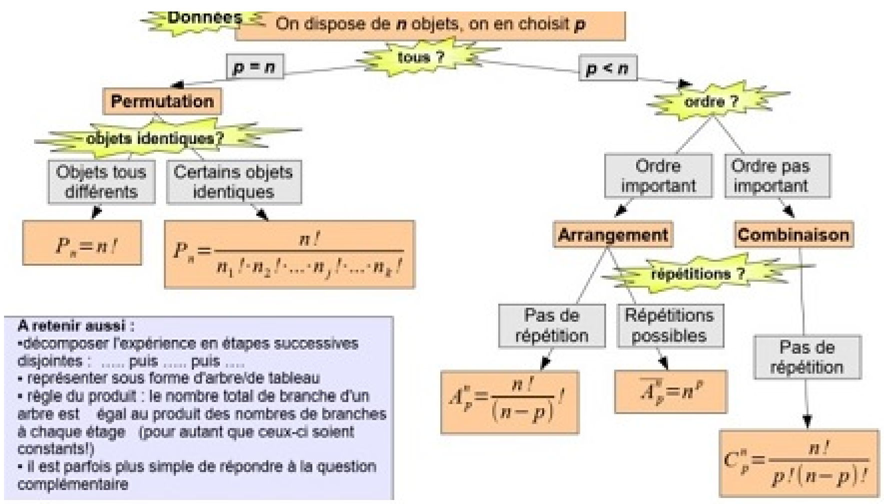
Soient $a, b \in \mathbb{R}$,, et soit $n \in \mathbb{N}$. alors

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i$$

Exemple 17. $(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 a^0 b^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 a^0 b^2 = 1a^3 + 3a^2 b + 3a^1 b^2 + 1b^3$.

Résumé d'analyse combinatoire


Données
On dispose de n objets, on en choisit p
tous ?
p = n
p < n
Permutation
objets identiques?
Objets tous différents
Certains objets identiques
$P_n = n!$
$P_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_j! \cdot \ldots \cdot n_k!}$
ordre ?
Ordre important
Ordre pas important
Arrangement
Combinaison
répétitions ?
Pas de répétition
Répétitions possibles
Pas de répétition
$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}$
$\overline{A}_p^n = n^p$
$C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
A retenir aussi :
•décomposer l'expérience en étapes successives disjointes : ..... puis ..... puis ....
• représenter sous forme d'arbre/de tableau
• règle du produit : le nombre total de branche d'un arbre est égal au produit des nombres de branches à chaque étage (pour autant que ceux-ci soient constants!)
• il est parfois plus simple de répondre à la question complémentaire