

Filtre Numérique

Comme tout système discret, un filtre linéaire à temps discret réalise une opération de convolution entre le signal d'entrée et la réponse impulsionnelle du filtre.

Caractéristiques liées à la Réponse impulsionnelle

$x(n) \longrightarrow$

 $\longrightarrow y(n)$

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

$$\downarrow$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

◆ Causalité du filtre

Le filtre est causal ssi la réponse impulsionnelle est causale $h(n) = 0 \quad \forall n < 0$

◆ Stabilité

Le filtre est stable ssi la réponse impulsionnelle est absolument sommable $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$

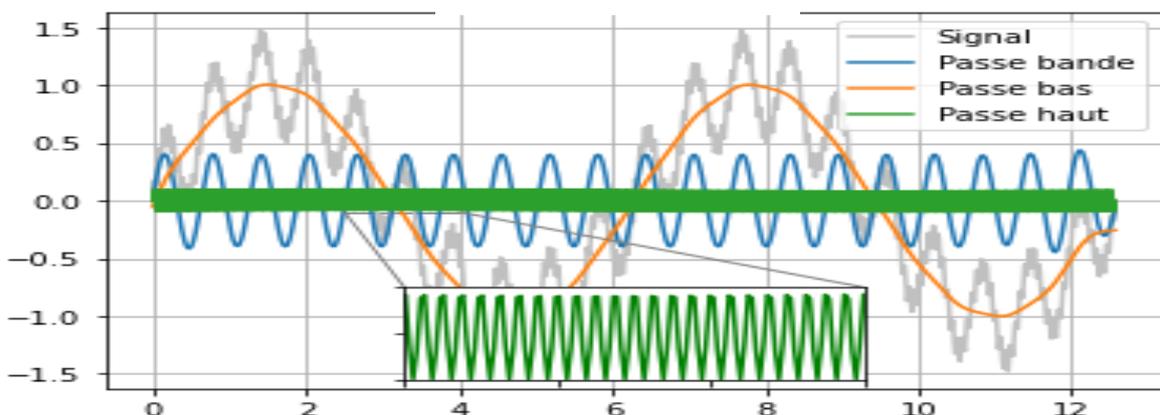
◆ Longueur de la réponse impulsionnelle

- Filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF)

$$h(n) \neq 0 \quad \forall n_0 \leq n \leq n_0 + N - 1 \quad N : \text{longueur de la réponse impulsionnelle}$$

- Filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII)

$$h(n) \neq 0 \quad \forall n > n_0$$



Résultats des différents filtrages numériques

Représentation d'un filtre numérique

Equation aux différences (Relation Entrée-Sortie)

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \quad \text{avec } a_0=1$$

◆ $N=0 \longrightarrow y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$

- Filtre à *réponse non réursive*
- La réponse impulsionnelle est finie
- Filtre à **Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)**

◆ $N \geq 1 \longrightarrow y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$

- *Filtre à réponse réursive*
- Filtre à **Réponse Impulsionnelle Infinie (RII)**

Fonction de transfert en z

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

ou

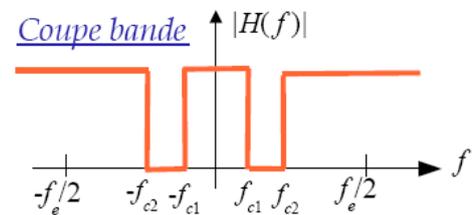
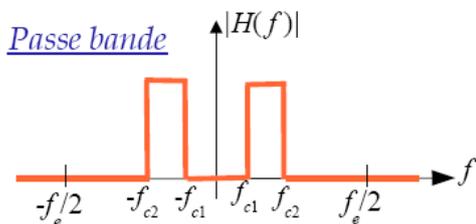
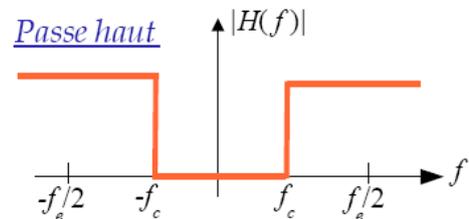
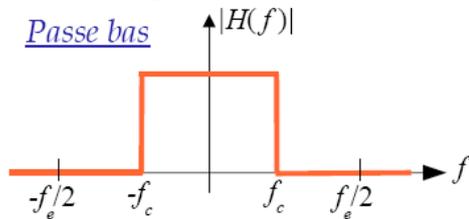
$$H(z) = \frac{b_M z^{-M} + \dots + b_1 z^{-1} + b_0}{a_N z^{-N} + \dots + a_1 z^{-1} + a_0}$$

◆ **Stabilité et causalité liées à la fonction de transfert**

Un filtre numérique causal est stable si et seulement si tous les pôles de $H(z)$ sont à l'intérieur du cercle unité.

Réponse Fréquentielle

Elle peut être définie comme le spectre du signal de sortie divisé par le spectre du signal d'entrée.



Réponses en fréquence des différents types de filtre

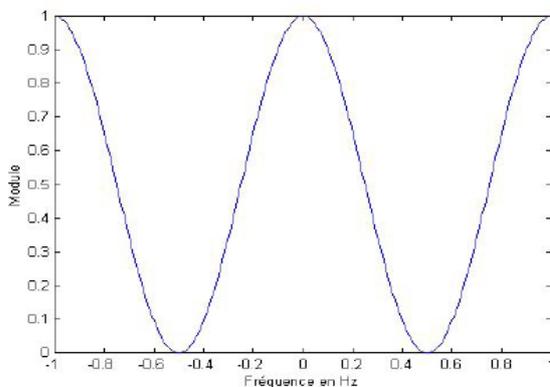
Exemple

On a la relation entrée-sortie suivante : $y(n) = \frac{1}{4}(x(n) + 2x(n-1) + x(n-2))$

▪ Réponse impulsionnelle

$$h(n) = \frac{1}{4}(\delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2))$$

• Module $|H(f)| = \cos^2(\pi f)$



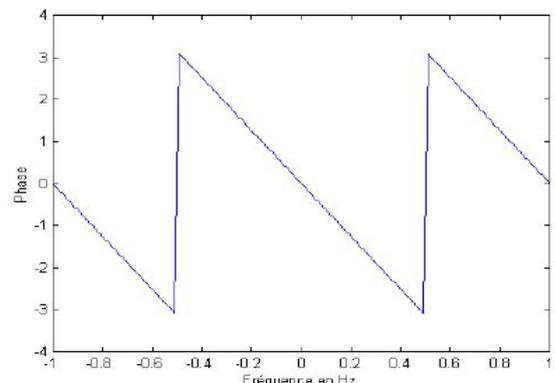
Réponse en amplitude

▪ Réponse fréquentielle

$$H(f) = e^{-j2\pi f} \cos^2(\pi f)$$

• Phase $\arg(H(f)) = -2\pi f$

Phase linéaire par rapport à f



Réponse en phase

En fonction de $H(z)$, $H(f)$ est donnée par : $H(f) = H(z)]_{pour z=\exp(j2\pi f)}$

Classification des filtres numériques selon la réponse impulsionnelle

Comme nous l'avons vu ci-dessus, il existe deux grandes classes de filtres numériques :

Filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF) : dans ce cas $h(n) = 0$ Pour $n \geq N$ et $h(n) \neq 0$ pour $n = 0, 1, \dots, N - 1$. N désigne la longueur du filtre.

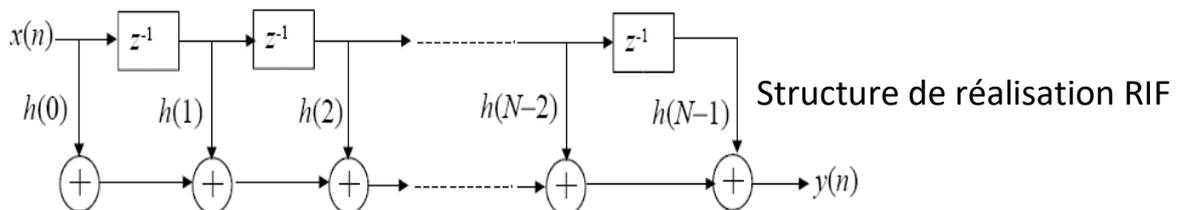
Filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII) : dans ce cas $h(n) \neq 0$ Pour $n = 0, 1, \dots, +\infty$.

Classification des filtres numériques selon la structure de réalisation

Réalisation des filtres

◆ Réalisation non-réursive ou transverse

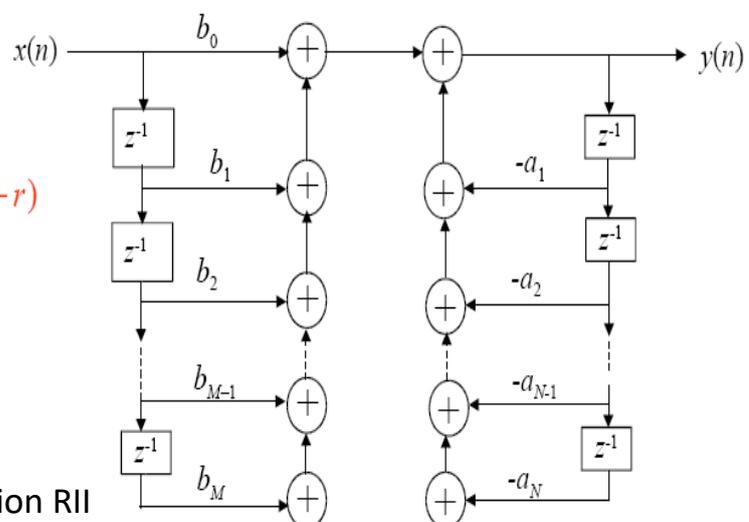
Filtre causal à réponse impulsionnelle finie de longueur N :
$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)h(k)$$



◆ Réalisation réursive

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

Structure de réalisation RII



Caractéristiques des filtres RIF

◆ Stabilité inconditionnelle

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n z^{-n}$$

Les filtres à réponse impulsionnelle finie sont toujours stables car ils n'admettent pas de pôles.

◆ Approximation

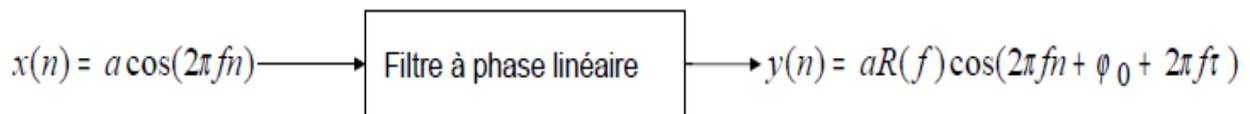
Toute fonction de filtrage numérique stable et causale peut être approchée par la fonction de transfert d'un filtre RIF

◆ Phase linéaire

Les filtres RIF peuvent générer des filtres à phase linéaire

Si un filtre est à phase linéaire, sa réponse fréquentielle est de la forme

$$H(f) = R(f)e^{-j\varphi(f)} \quad \varphi(f) = \varphi_0 + 2\pi f\tau \quad \tau : \text{constante}$$



On montre qu'un filtre RIF est à phase linéaire si ses coefficients sont symétriques

$$h(n) = h(N - 1 - n)$$

Attention !

Dans la partie précédente, nous avons utilisé f comme variable de fréquence. De plus, la fréquence d'échantillonnage a été choisie $F_e = 1$.

Dans ce qui suit $2i\pi fn$ (utilisée précédemment) est remplacée par $2i\pi \frac{v}{F_e} n$.

Avec :

$v = f$ est la variable de la fréquence ;

$F_e = \frac{1}{T_e}$ est la période d'échantillonnage.

$i = j$ est l'unité imaginaire.

Gabarit d'un filtre

Le gabarit d'un filtre définit le comportement caractéristique de sa réponse fréquentielle. A partir de la fonction de transfert d'un filtre qui est de la forme $F(f) = |F(f)|e^{j\varphi(f)}$ avec $|F(f)|$ le gain et $\varphi(f)$ la phase, on définit le gain en dB (décibel) de la façon suivante :

$$G_{dB}(f) = 20\log_{10}(|F(f)|)$$

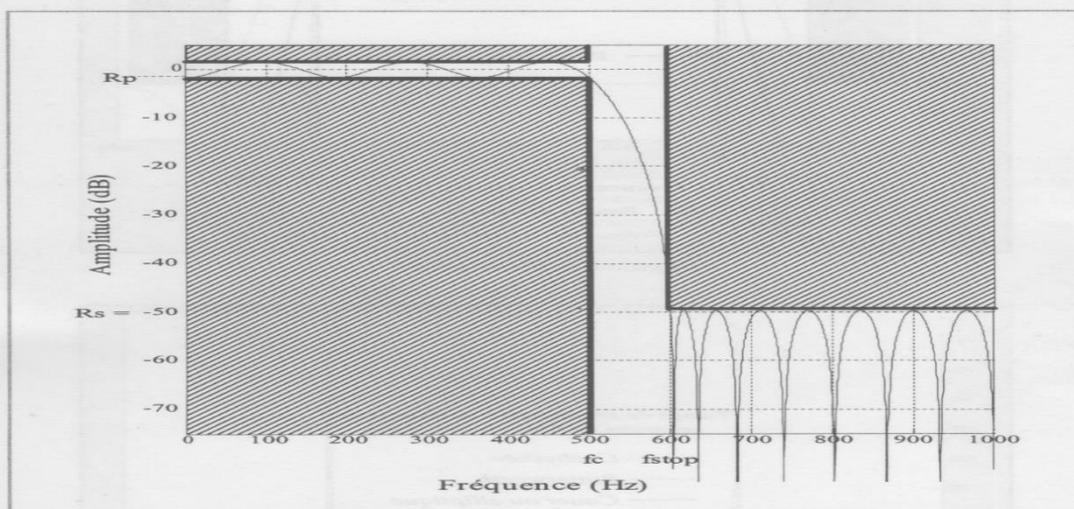
Pour introduire les paramètres importants définissant le gabarit d'un filtre, nous allons prendre l'exemple du filtre le plus simple : le filtre passe-bas. Dans ce cas, le gabarit à réaliser a l'allure de la figure V.7.

Les paramètres importants à définir sont :

- la fréquence de coupure f_c correspondant au gain fréquentiel $-3dB$. La connaissance de f_c détermine la largeur de la zone appelée bande passante.
- l'atténuation maximale R_p (ou A_{max}) dans la bande passante ; l'atténuation ne doit pas dépasser cette valeur dans la bande passante.
- la fréquence f_{stop} qui correspond à la limite de la zone appelée bande coupée : c'est la fréquence atténuée. On la notera f_s par la suite pour simplifier l'écriture.
- l'atténuation minimale R_s (ou A_{min}) dans la bande coupée ; l'atténuation ne doit pas être inférieure à cette valeur dans la bande coupée.

La zone délimitée par les fréquences f_c et f_s est appelée bande de transition.

Le choix des paramètres f_c , f_s , R_p , R_s détermine la pente d'atténuation du filtre dans la bande de transition. La valeur de cette pente fixe automatiquement l'ordre du filtre puisqu'elle vaut : $-20N \text{ dB/décade}$ où N est un entier permettant de définir l'ordre du filtre.



Gabarit d'un filtre passe-bas

FILTRES RIF À PHASE LINÉAIRE

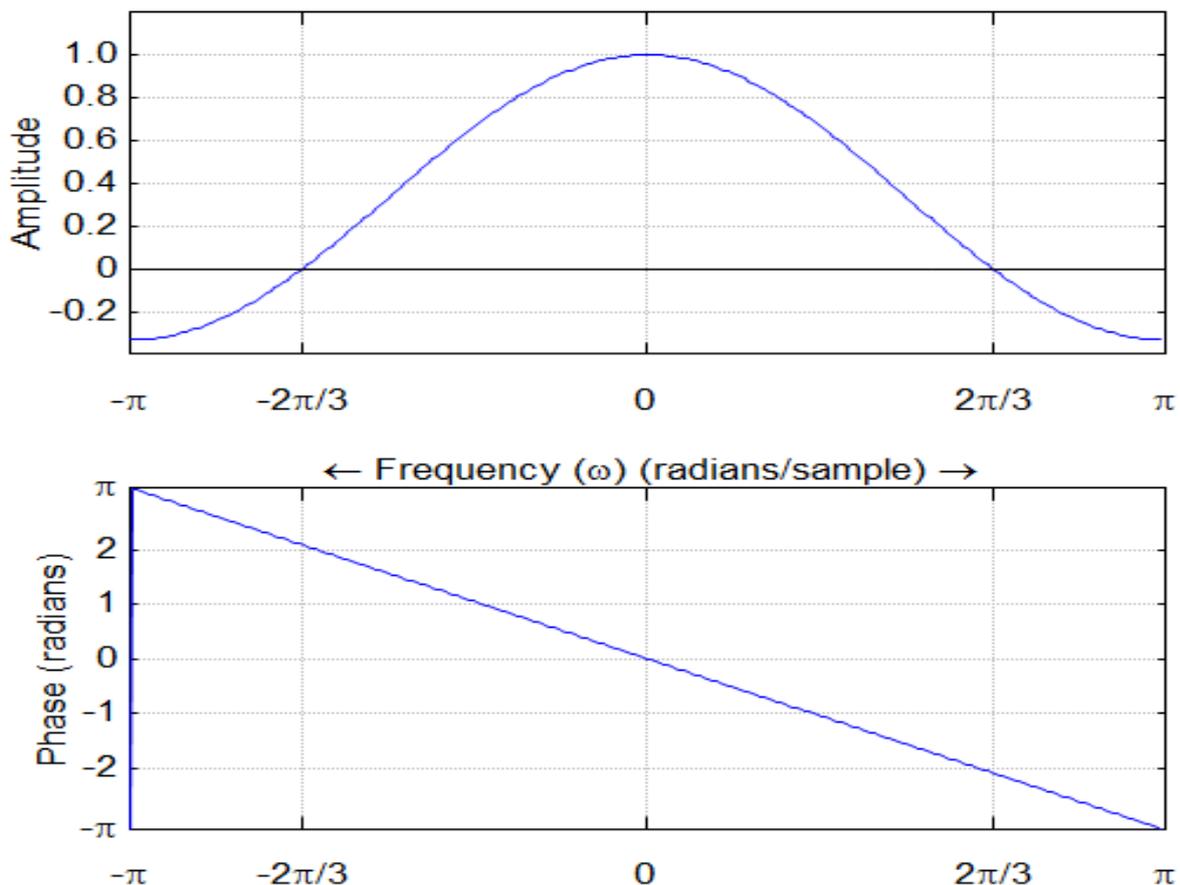
Filtres à phase linéaire

Soit le filtre décrit par la réponse fréquentielle suivante :

$$H(\nu) = \sum_{n=0}^N h(n)e^{-2i\pi\frac{\nu}{F_e}n}$$

Supposons pour simplifier le problème que $N = 2M$ (le même type de raisonnement peut être effectué avec $N = 2M + 1$). La réponse fréquentielle peut alors s'écrire :

$$H(\nu) = e^{-i2\pi\frac{\nu}{F_e}M} \left[h(M) + \sum_{n=0}^{M-1} h(n)e^{i2\pi\frac{\nu}{F_e}(M-n)} + \sum_{n=0}^{M-1} h(2M-n)e^{-i2\pi\frac{\nu}{F_e}(M-n)} \right]$$



Réponse d'un filtre à phase linéaire

Avantages et inconvénients des filtres RIF

S'agissant d'un filtre non récursif, le filtre RIF est simple d'implémentation. Il est caractérisé par sa fonction de transfert en z de type polynômiale :

$$H^Z(z) = \sum_{k=0}^N h(k)z^{-k}.$$

De plus, un filtre RIF est toujours stable, pour autant que les valeurs $h(n)$ de sa réponse impulsionnelle soient toutes finies. Dans ce cas la fonction de transfert $H^Z(z)$ a tous ses pôles à l'origine.

Un autre avantage des filtres RIF est qu'ils sont causals, si toutes les valeurs $h(n)$ sont nulles pour $n < 0$. Si ce n'est pas le cas, il est possible de les rendre causals moyennant un certain nombre

Les différents types de filtres RIF

Il existe 4 types de filtres RIF, selon la parité de l'ordre du filtre et la nature de la réponse impulsionnelle.

Pour la suite et pour chaque catégorie de filtre RIF, la réponse fréquentielle sera exprimée sous la forme suivante :

$$H(\nu) = |H(\nu)|e^{-i\varphi_H(\nu)}.$$

Une telle écriture permettra de déterminer avec exactitude les domaines d'utilisation des filtres selon leur type.

1.3.1 Type I : N pair, réponse impulsionnelle symétrique

Les filtres de ce type ont un ordre pair, $N = 2M$, et présente une réponse impulsionnelle symétrique par rapport à $\frac{N}{2}$. Ainsi $h(n)$ vérifie :

$$h(n) = h(N - n) \Rightarrow h(n + M) = h(M - n) \quad \forall n \in \mathbb{N} / 1 \leq n \leq M.$$

On peut montrer que leur réponse en fréquence

$$H_I(\nu) = \sum_{n=0}^{2M} h(n)e^{-2i\pi \frac{\nu}{F_e} n}$$

s'exprime :

$$H_I(\nu) = e^{-2i\pi \frac{\nu}{F_e} M} \left[h(M) + 2 \sum_{k=1}^M h(M - k) \cos \left(2\pi \frac{k\nu}{F_e} \right) \right].$$

Il s'ensuit que l'amplitude et la phase de la réponse en fréquence sont définies par :

$$\begin{cases} |H_I(\nu)| = h(M) + 2 \sum_{k=1}^M h(M - k) \cos \left(2\pi \frac{k\nu}{F_e} \right) \\ \varphi_{H_I}(\nu) = 2\pi \frac{\nu}{F_e} M \end{cases}$$

Type II : N impair, réponse impulsionnelle symétrique

Les filtres de ce type se caractérisent par leur ordre impair, $N = 2M + 1$. Leur réponse impulsionnelle est symétrique par rapport à $\frac{N}{2}$.

On peut montrer que leur réponse en fréquence

$$H_{II}(\nu) = \sum_{n=0}^{2M+1} h(n)e^{-2i\pi\frac{\nu}{F_e}n}$$

se réécrit :
$$H_{II}(\nu) = e^{-i2\pi\frac{\nu}{F_e}(M+\frac{1}{2})} \sum_{n=1}^{M+1} 2h(M+1-n) \cos\left(2\pi\frac{\nu}{F_e}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right).$$

Soit :

$$\begin{cases} |H_{II}(\nu)| = \sum_{n=1}^{M+1} 2h(M+1-n) \cos\left(2\pi\frac{\nu}{F_e}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right) \\ \varphi_{H_{II}}(\nu) = 2\pi\frac{\nu}{F_e}\left(M+\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Type III : N pair, réponse impulsionnelle anti-symétrique

Pour les filtres de ce type, l'ordre N est pair ($N = 2M$) et la réponse impulsionnelle est anti-symétrique :

$$h(n) = -h(N-n) \Rightarrow \begin{cases} h(n+M) = -h(M-n) \quad \forall n \in \mathbb{N} / 1 \leq k \leq M \\ h(M) = 0 \end{cases}$$

On peut montrer que leur réponse en fréquence

$$H_{III}(\nu) = \sum_{n=0}^{2M} h(n)e^{-2i\pi\frac{\nu}{F_e}n}$$

s'exprime :
$$H_{III}(\nu) = e^{i(\frac{\pi}{2}-2\pi\frac{\nu}{F_e}M)} \sum_{k=1}^M 2h(M-k) \sin\left(2\pi\frac{k\nu}{F_e}\right).$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{cases} |H_{III}(\nu)| = \sum_{k=1}^M 2h(M-k) \sin\left(2\pi\frac{k\nu}{F_e}\right) \\ \varphi_{H_{III}}(\nu) = 2\pi\frac{\nu}{F_e}M - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Type IV : N impair, réponse impulsionnelle anti-symétrique

Pour ces filtres, l'ordre est impair ($N = 2M + 1$) et la réponse impulsionnelle présente la relation de symétrie :

$$h(n) = -h(N-n).$$

On montre facilement que de la réponse en fréquence s'écrit :

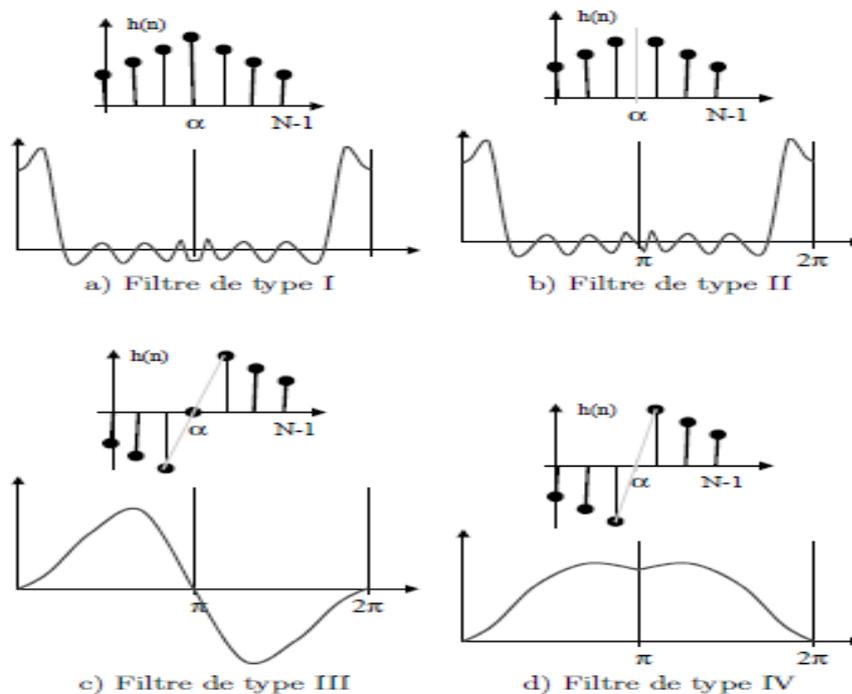
$$H_{IV}(\nu) = e^{i(\frac{\pi}{2}-2\pi\frac{\nu}{F_e}(M+\frac{1}{2}))} \sum_{n=1}^{M+1} 2h(M+1-n) \sin\left(2\pi\frac{\nu}{F_e}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right).$$

Soit :

$$\begin{cases} |H_{IV}(\nu)| = \sum_{n=1}^{M+1} 2h(M+1-n) \sin\left(2\pi\frac{\nu}{F_e}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right) \\ \varphi_{H_{IV}}(\nu) = 2\pi\frac{\nu}{F_e}\left(M+\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Type	I	II	III	IV
Ordre N	pair	impair	pair	impair
Symétrie de $h(n)$	symétrique	symétrique	anti-symétrique	anti-symétrique
Symétrie de $ H(\nu) $	symétrique	symétrique	anti-symétrique	anti-symétrique
Période de $ H(\nu) $	F_e	$2F_e$	F_e	$2F_e$
Phase initiale $\varphi_H(0)$	0	0	$\pi/2$	$\pi/2$
$ H(0) $	$\sum_{n=0}^N h(n)$	$\sum_{n=0}^N h(n)$	0	0
$ H(F_e/2) $	arbitraire	0	0	arbitraire
Utilisation	passé-bas, passé-haut, passé-bande, coupe-bande	passé-bas, passé-bande	dérivateur, transformateur de Hilbert	passé-haut, dérivateur, transformateur de Hilbert

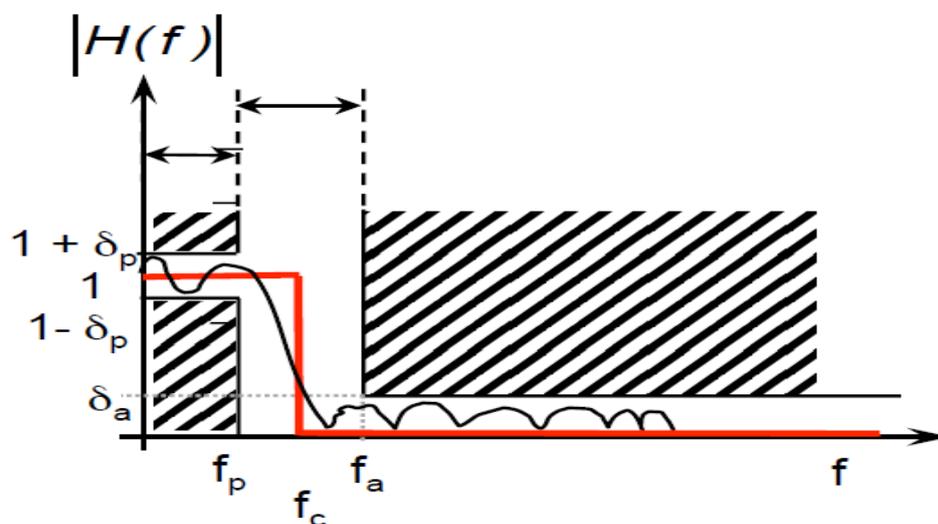
Résumé des 4 types de filtre RIF



Les quatre types du filtre RIF à phase

Conception des filtres numériques RIF

Concevoir un filtre numérique consiste à déterminer la fonction de transfert en z du filtre qui va approcher au mieux les spécifications sur la réponse fréquentielle en amplitude (celles de la phase sont complexes à satisfaire simultanément).



Méthode des fenêtres

1- à partir di Gabarit réel, déterminer la longueur du filtre FIR. Ce dernier est donné par :

$$N = \frac{2}{3} \log_{10} \left(\frac{1}{10\delta_a\delta_p} \right) \frac{F_e}{\Delta f}. \text{ Avec : } \Delta f = f_a - f_p.$$

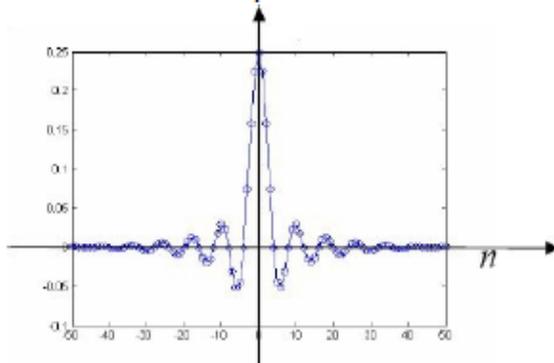
Ici, la bande de transition est plus importante que les oscillations.

2- à partir de $H(f)$, la réponse en fréquence idéal, déterminer la réponse impulsionnelle du filtre. Cette dernière peut être calculer par la TF^{-1} de $H(f)$ donnée par :

$$h(n) = \int_{(F_e)} H(f) e^{j2\pi f n} df.$$

$h(n)$ est une fonction symétrique car $H(f)$ est une fonction réelle. Cependant,

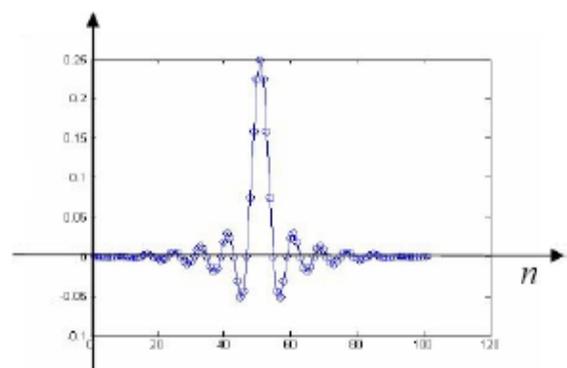
- On a trouvé la réponse $h_N(n)$, mais celle ci est centrée sur 0
- Donc elle n'est pas causale !



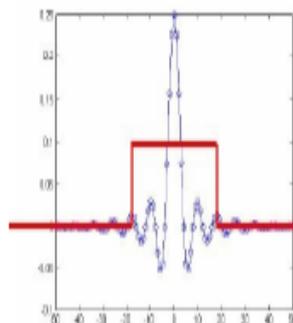
Facile à implémenter car numérique.
 (mémoires à décalage)

Solution :

En la retardant de $N/2$
 échantillons, la réponse
 impulsionnelle devient causale !

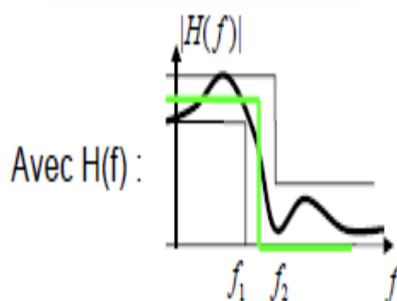


Pondération de la réponse impulsionnelle idéale $h(n)$ par une suite discrète $w(n)$: $h_N(n) = h(n) \cdot w(n)$



Exemple : $w(n)$ est la fenêtre rectangulaire.
 En fréquence, on a donc :

$$H_N(f) = H(f) * W(f) \quad \text{avec} \quad W(f) = \frac{\sin(N\pi f)}{\sin(\pi f)}$$



$$h(n) = \int_{-F/2}^{F/2} H(f) e^{j2\pi f n} df \rightarrow h(n) = \int_{-B/2}^{B/2} H(f) e^{j2\pi f n} df \quad \text{avec} \quad B = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

$$\rightarrow h(n) = \frac{\sin(\pi B n)}{\pi n}$$

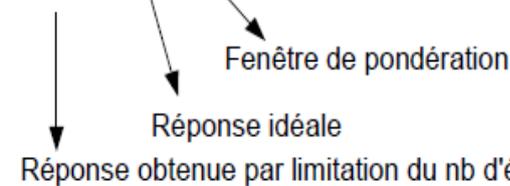
$h(n)$ est définie entre $-\infty$ et $+\infty$.

Mathématiquement, cela revient à multiplier $H_N(f)$ par un exponentiel complexe

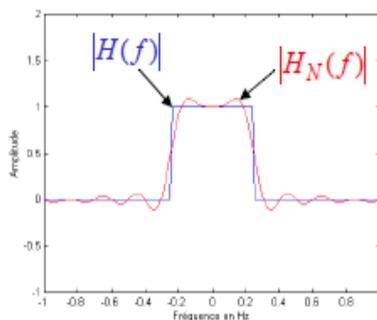
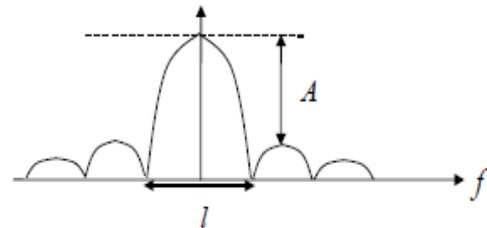
Effets de la limitation du nombre d'échantillons à N

$$h_N(n) = h(n) \cdot w(n)$$

$$H_N(f) = H(f) * W(f)$$



■ Allure de $W(f)$ pour une fenêtre rectangulaire

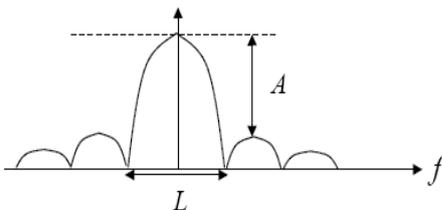


• La pondération temporelle introduit des ondulations et limite la raideur de coupure du filtre. Un compromis est à faire entre la raideur et l'amplitudes des ondulations.

• Cette méthode donne des ondulations de même amplitude dans la bande passante et dans la bande atténuée.

□ Choix de la fenêtre de pondération

■ Allure de $W(f)$



L : largeur du lobe principal

A : amplitude des lobes secondaires

Fenêtre idéale : L Faible, A_{dB} Faible

■ Qq relations

Relation entre la longueur N de la fenêtre et la bande de transition ΔF du filtre obtenu

$$N \cdot \Delta F = c^{ste}$$

	A_{dB}	L	ΔF	δ_2 (dB)
Rectangulaire	-13	$4/N$	$0.9/N$	-21
Hanning	-31	$8/N$	$3.1/N$	-44
Hamming	-41	$8/N$	$3.3/N$	-53
Blackman	-57	$12/N$	$5.5/N$	-74

■ Qq propriétés des fenêtres

- ① Si N croit, L décroît \rightarrow bande de transition ΔF faible
- ② A est indépendant de la longueur de la fenêtre
- ③ On ne peut pas réduire simultanément A et L

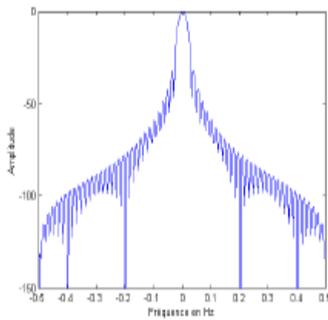
■ Réglages

- ① δ_2 désirée \rightarrow choix type de fenêtre
- ② ΔF désirée \rightarrow choix de N

■ Quelques fenêtres de pondération

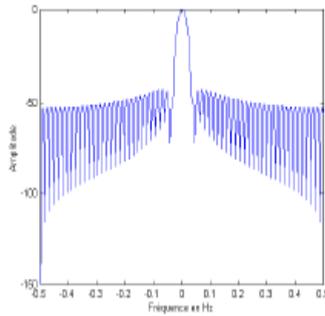
Hanning

$$w(n) = 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$



Hamming

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$



Bartlett

$$w(n) = 1 - \frac{2\left(n - \frac{N-1}{2}\right)}{N-1}$$

