Université de Mohamed BOUDIAF – Msila
Faculté de Technologie
Département d'Electronique

Matière : Traitement Avancé du Signal 01
M1 – Instrumentation

Chapitre 3 - Partie 2 :
Analyse et synthèse des filtres numériques.

Pr. Khaled ROUABAH

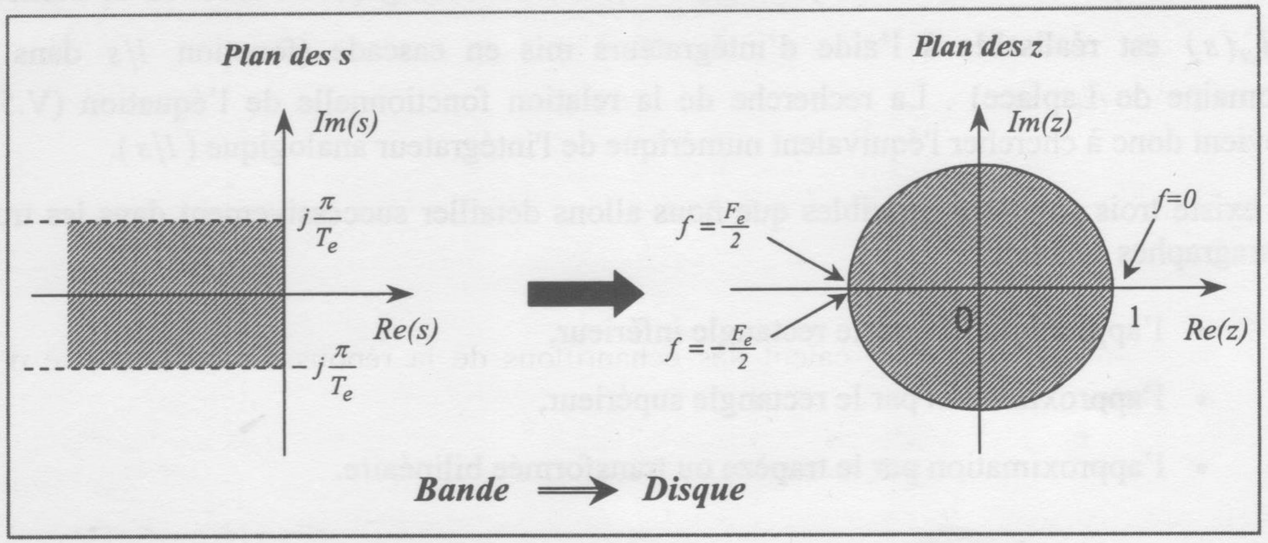
Année universitaire 2023/2024

Synthèse des filtres IIR - Transformation bilinéaire

La transformée bilinéaire fournit un mappage un à un non linéaire des points de fréquence du plan 's' avec ceux du cercle unité dans le plan 'z', cette procédure nous permet donc de mettre en œuvre tout type de transformation numérique.

Le filtre numérique dérivé de cette méthode va avoir approximativement la même réponse dans le domaine temporel que le filtre analogique d'origine pour tout type d'entrée.

Idéalement, pour passer du plan des s au plan des z, il suffit d'effectuer la transformation suivante :



$$z = e^{sT_e} = e^{(\sigma + j\omega_a)T_e} = e^{(\sigma + j2\pi f_a)T_e} \Leftrightarrow s = \frac{1}{T_e}\ln(z)$$

$$H(s) = \frac{1}{1+s\tau} \xrightarrow{z} H(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{T_e}\ln(z).\tau}$$

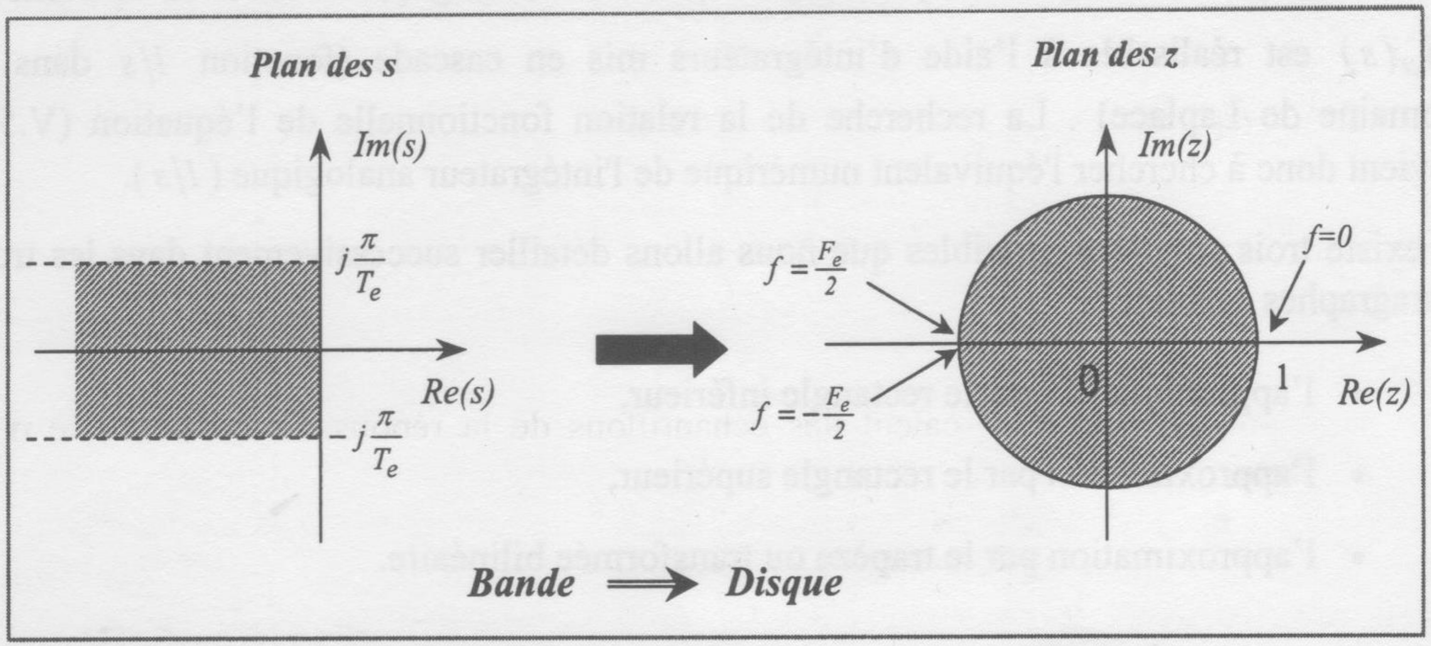
Transformation pratiquement irréalisable

Synthèse des filtres IIR - Transformation bilinéaire

Idéalement, pour passer du plan des s au plan des z, il suffit d'effectuer la transformation suivante :

$$z = e^{sT_e} = e^{(\sigma + j\omega_a)T_e} = e^{(\sigma + j2\pi f_a)T_e} \Leftrightarrow s = \frac{1}{T_e}\ln(z)$$

$$H(s) = \frac{1}{1+s\tau} \xrightarrow{z} H(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{T_e}\ln(z).\tau}$$



Transformation pratiquement irréalisable

Synthèse des filtres IIR - Transformation bilinéaire

La synthèse des filtres RII est fortement inspirée des méthodes de synthèse des filtres analogiques. En effet, ces méthodes reposent essentiellement sur l'idée d'une transposition des méthodes de synthèse de filtres analogiques au cas des filtres numériques. C'est ainsi que l'on retrouve dans le domaine numérique, des filtres RII de Butterworth, Chebychev…

On dispose du filtre analogique de transformée de Laplace $H_a(s)$, on recherche le filtre numérique $H(z)$ de réponse fréquentielle identique à celle du filtre analogique. La fonction de transfert du filtre analogique s'écrit :

$$H_a(s) = \frac{Y_a(s)}{X_a(s)} = \frac{b_M s^M + \ldots + b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \ldots + a_0} \quad \text{avec } M \leq N$$

$$H_a(s) = \prod_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i}{s - s_i}$$

Il faut donc trouver une relation fonctionnelle $s = f(z)$ pour passer du plan des s au plan des z de telle sorte que :

$$H(z) = H_a(s)\big|_{s=f(z)}$$

$H_a(s)$ est réalisable à l'aide d'intégrateurs mis en cascade (fonction $1/s$ dans le domaine de Laplace)

Synthèse des filtres IIR - Transformation bilinéaire

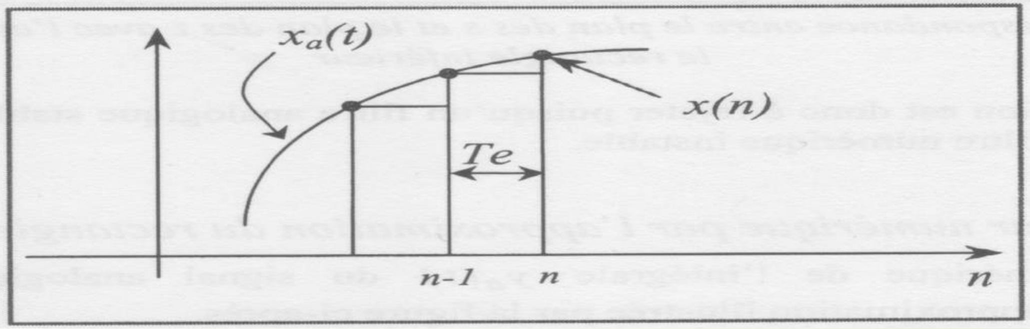
➔ Chercher l'équivalent de l'intégrateur analogique en 1/s

Si $y_a(t)$ est l'intégrale d'un signal analogique causal $x_a(t)$ alors on a la relation suivante :

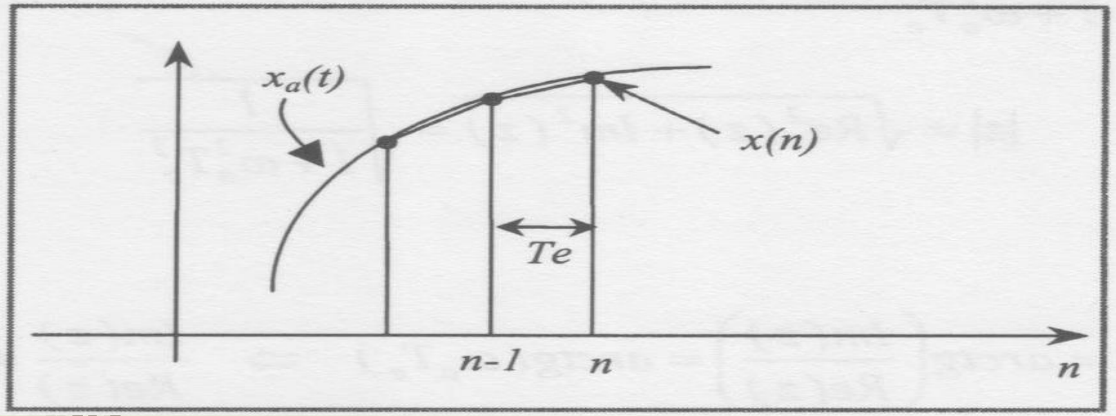
$$y_a(t) = \int_0^t x_a(u)\,du$$

Pour trouver l'équivalent numérique de cette intégrale, on peut faire l'approximation

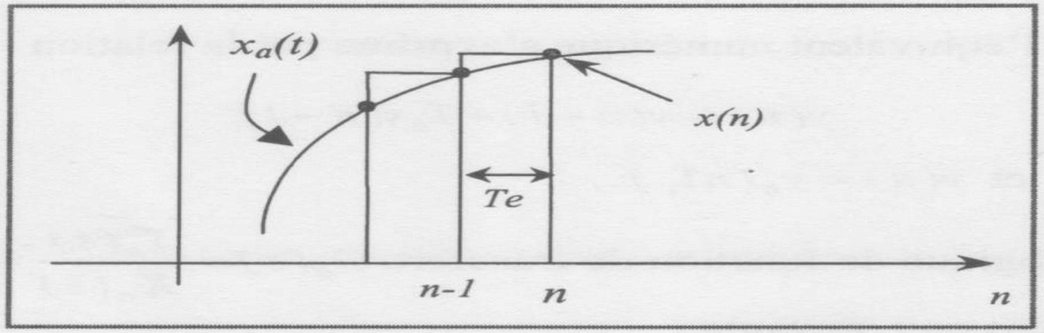
- l'approximation par le rectangle inférieur,
- l'approximation par le rectangle supérieur,
- l'approximation par le trapèze ou transformée bilinéaire.



Approximation d'une intégrale par le rectangle inférieur



Approximation d'une intégrale par le trapèze



Approximation d'une intégrale par le rectangle supérieur

Synthèse des filtres IIR - Transformation bilinéaire

- l'approximation par le rectangle inférieur

La relation fonctionnelle $s = f(z)$ recherchée s'écrit

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T_e z^{-1}} = \frac{z - 1}{T_e} \quad \Leftrightarrow \quad z = 1 + T_e s$$

➔ Rejetée puisque un filtre analogique stable peut conduire à un filtre numérique instable

- l'approximation par le rectangle supérieur

La relation fonctionnelle $s = f(z)$ recherchée s'écrit

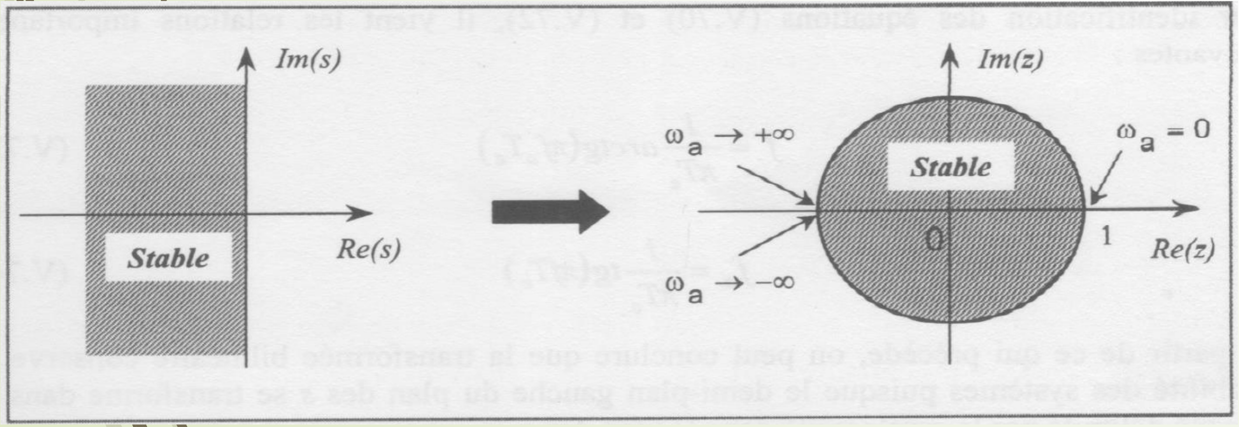
$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T_e} = \frac{z - 1}{T_e z} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{1 - T_e s}$$

➔ Approximation valable uniquement pour $f \ll F_e$

- l'approximation par le trapèze ou transformée bilinéaire.

La relation fonctionnelle $s = f(z)$ recherchée s'écrit

$$s = \frac{2}{T_e}\left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right) = \frac{2}{T_e}\left(\frac{z - 1}{z + 1}\right) \qquad z = \frac{1 + (T_e/2)s}{1 - (T_e/2)s} = \frac{2 + T_e s}{2 - T_e s}$$



Pour la transformation bilinéaire

➔ Le demi plan gauche du domaine de Laplace se transforme dans le cercle unité du plan de z ➔ Un filtre analogique stable donnera un filtre numérique stable

➔ Par contre, elle introduit une distorsion en fréquence du fait que l'axe des fréquences analogiques $0 \le f \le +\infty$ se trouve comprimé dans l'intervalle $0 \le f \le F_e$

Synthèse des filtres IIR - Transformation bilinéaire

Algorithme de transformation bilinéaire

1. on écrit le cahier des charges du filtre à réaliser en terme de gabarit numérique,
2. on choisit F_e en fonction de l'application et en respectant le théorème d'échantillonnage de Shannon,
3. On détermine le gabarit analogique correspondant par pré-déformation du gabarit numérique, c'est-à-dire que l'on transforme les fréquences caractéristiques (bande passante, bande coupée…) pour tenir compte des effets de compression ultérieurs en utilisant la formule

$$f_a = \frac{1}{\pi T_e} tg(\pi f T_e)$$

4. on trouve la fonction de transfert $H_a(s)$ du filtre analogique décrit par le gabarit,
5. enfin, on calcule $H(z)$ en utilisant la transformation bilinéaire :

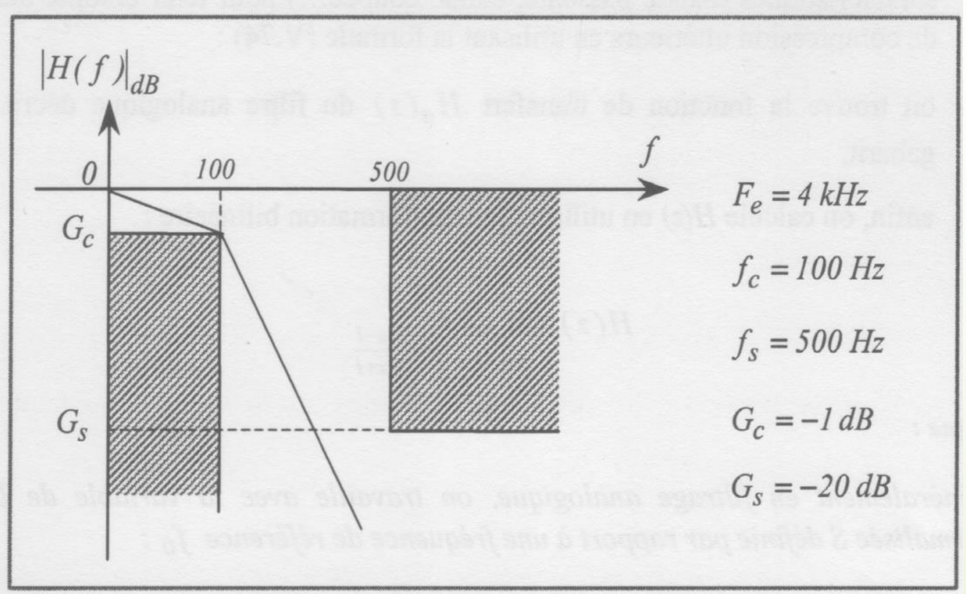
$$H(z) = H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T_e}\frac{z-1}{z+1}}$$

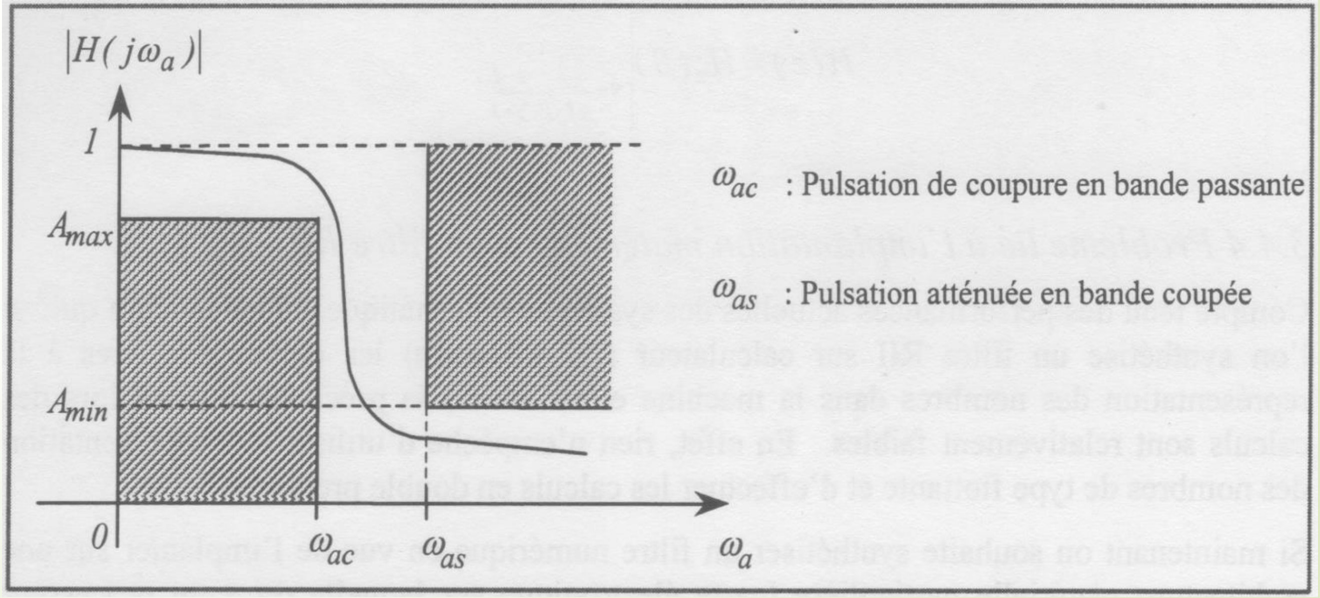
Synthèse des filtres IIR - Transformation bilinéaire

Exemple de synthèse d'un filtre RII

On souhaite synthétiser un filtre numérique récursif passe-bas à partir d'un filtre analogique de type Butterworth en utilisant la transformation bilinéaire. Le filtre à synthétiser doit répondre au gabarit numérique suivant :

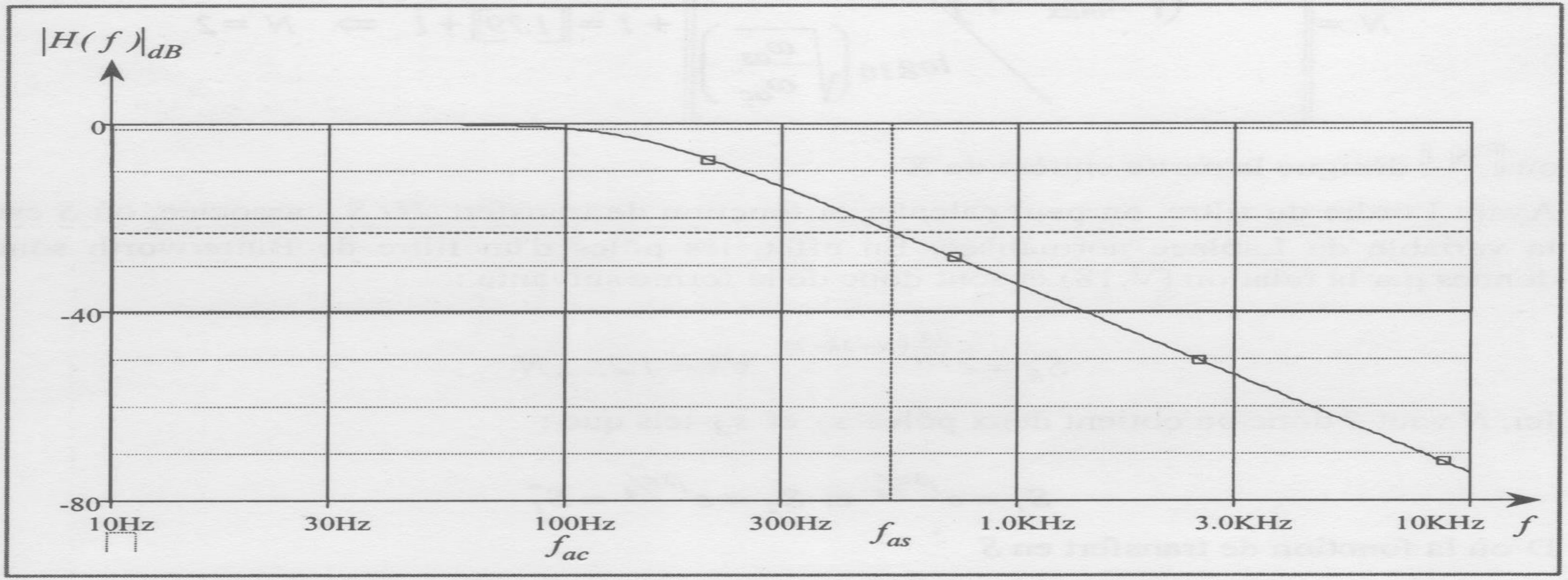
Il nous faut dans un premier temps trouver les paramètres du gabarit analogique correspondant, ce qui nécessite de calculer les valeurs de $\omega_{ac}, \omega_{as}, A_{max}, A_{min}$ conformément au gabarit analogique représenté sur la figure ci-après :





Synthèse des filtres IIR - Transformation bilinéaire

La figure ci-après montre la réponse fréquentielle du filtre analogique correspondant. On observe que le gabarit souhaité est bien respecté.



Comparaison des filtres RIF et RII

a) Filtres RII

Avantages :

- peu de coefficients donc calcul rapide et peu de mémoire nécessaire ;
- Modélisation à partir des filtres analogiques (Possibilité d’obtenir des résonances) ;
- Phase non-linéaire (se traduit par une déformation du signal)

Inconvénients :

- Les coefficients doivent être codés avec beaucoup de précision ;
- Risque d'instabilité surtout pour les grands facteurs de qualité

b) Filtres RIF

Avantages:

- Pas de risque d'instabilité
- Phase linéaire ;
- Permet de synthétiser n'importe quelle fonction de transfert

Inconvénients :

- Nombreux coefficients surtout pour les pentes raides et les bandes passantes Etroites ;
- Ne permet pas d'obtenir des résonnances

Avantages des filtres Numériques

- ✓ Ils sont programmables en changeant uniquement des variables et non pas le circuit;
- ✓ On peut avoir des structures adaptatives, ce qui les rend très attractifs dans un certain nombre d'applications comme l'égaliseur de canal;
- ✓ La simulation se fait de manière exacte sur l'ordinateur;
- ✓ Pas de dégradation avec le temps et la température (2*2=4 il fait chaud ou froid, jour ou nuit !!!);
- ✓ La fréquence d'opération est constamment en progrès à l'aide des circuits de plus en plus rapides;
- ✓ Mais à ne pas utiliser à haute puissance - Donne des circuits complexes même pour des filtres simples ➔ Plus de consommation électrique.

FIR verus IIR

- ✓ Les filtres IIR nécessitent un volume de calcul moins important que les filtres FIR;
- ✓ Les filtres IIR introduisent une distorsion de temps de propagation contrairement aux filtres FIR;
- ✓ Un IIR peut être instable contrairement aux filtres FIR qui sont toujours stables;
- ✓ Les filtres IIR ont un bruit d'arrondi qui n'est pas faible en comparaison avec les filtres FIR.