Université de Mohamed BOUDIAF – Msila
Faculté de Technologie
Département d'Electronique

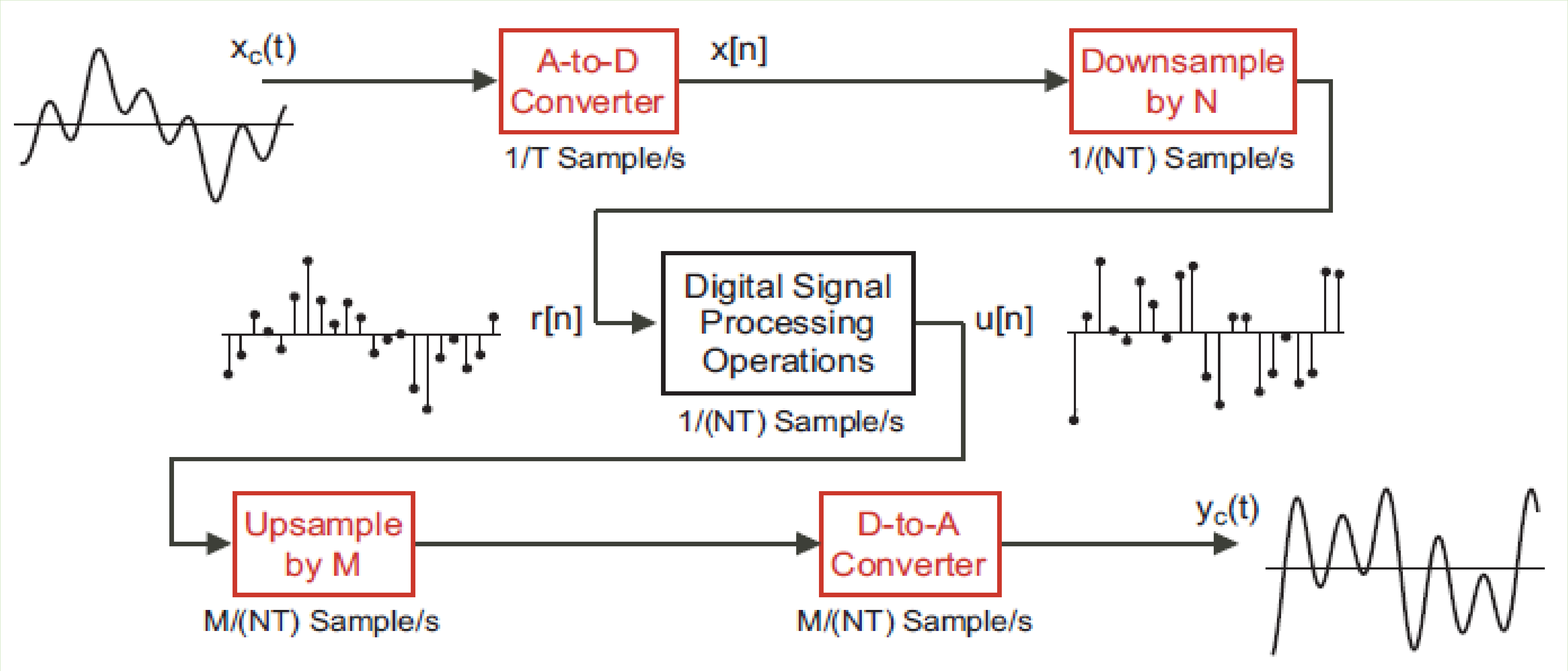
Matière : Traitement Avancé du Signal 01
M1 – Instrumentation

Chapitre 4 : Traitement Multicadences

Pr. Khaled ROUABAH

Année universitaire 2023/2024

Traitement numérique des signaux analogiques



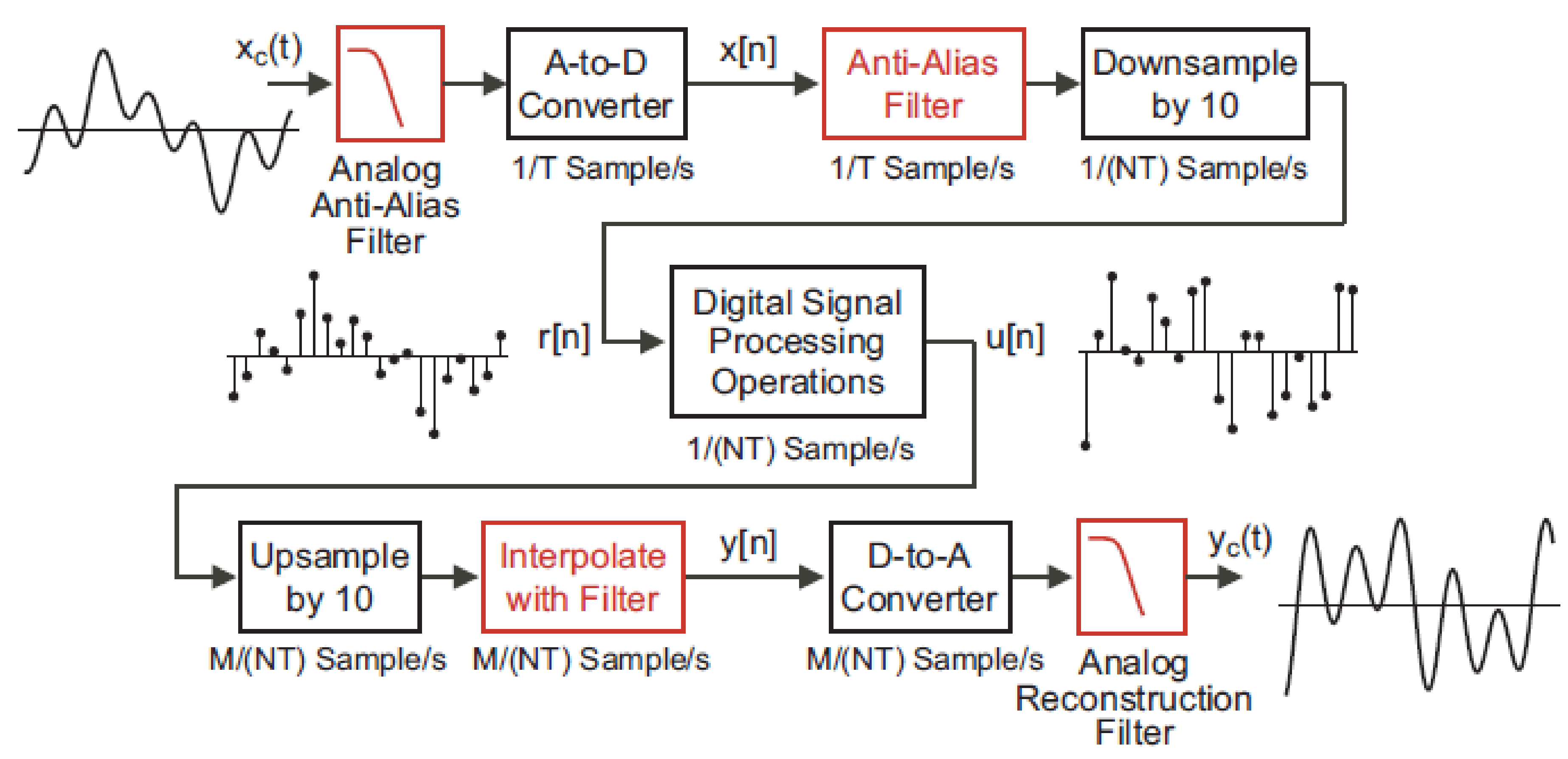
Les circuits numériques peuvent effectuer un traitement très complexe des signaux analogiques. Cependant ils nécessitent:

➔ La conversion des signaux analogiques en des signaux numériques;

➔ La conversion des signaux numériques en des signaux analogiques;

➔ Le Sous-échantillonnage et le Sur-échantillonnage pour les applications nécessitant un traitement spécifique.

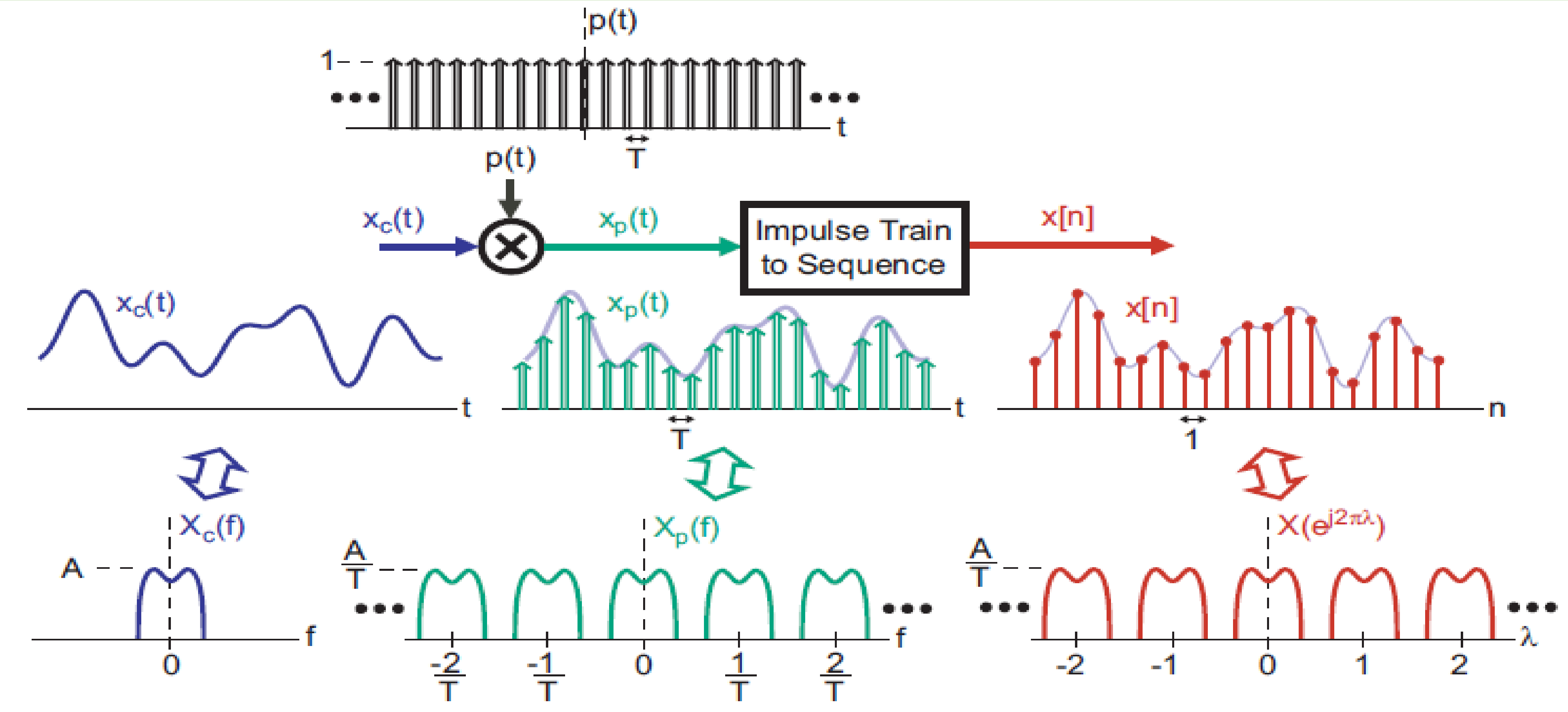
Inclusion des opérations de filtrage



➔ Le CAN et le sous-échantillonneur nécessitent un filtrage anti-repliement ➔ Empêcher le chevauchement des périodes du spectre;

➔ Le CNA et le sur-échantillonneur nécessitent un filtrage d’interpolation (c'est-à-dire une reconstruction) ➔ Faire un lissage des formes d'onde modifiées.

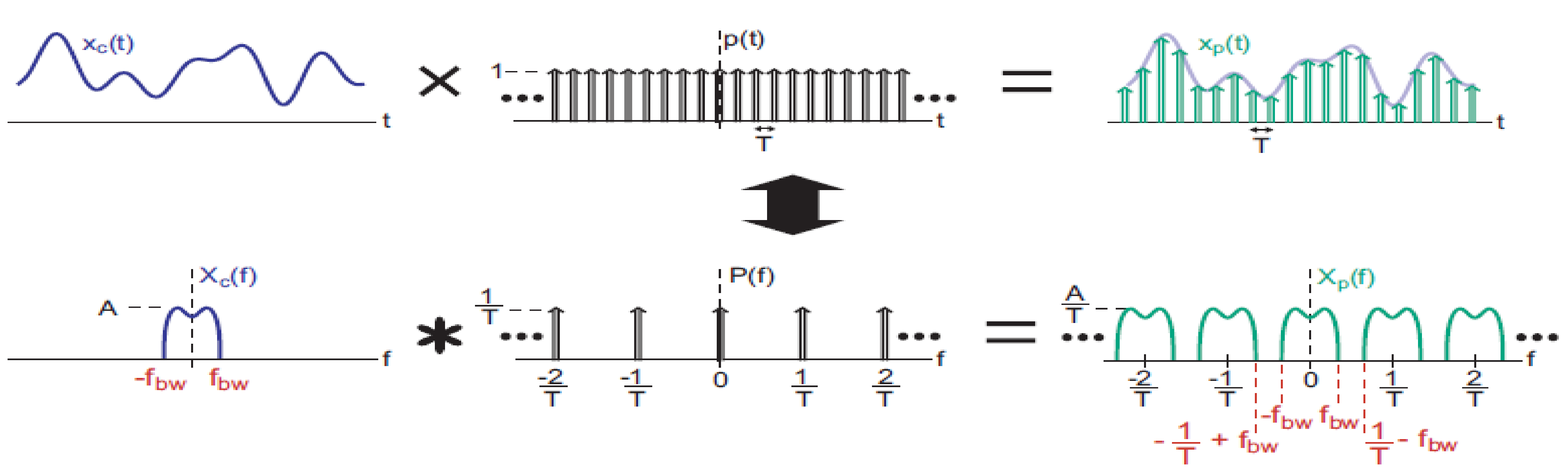
Résumé du processus d'échantillonnage



➔ Comme le montre la figure ci-dessus, l'échantillonnage conduit à la périodicité dans le domaine fréquentiel (Répétition du spectre de base);

➔ Nous devons éviter le chevauchement du spectre périodifié dans le domaine fréquentiel (c'est-à-dire, éviter le repliement).

Résumé du processus d'échantillonnage

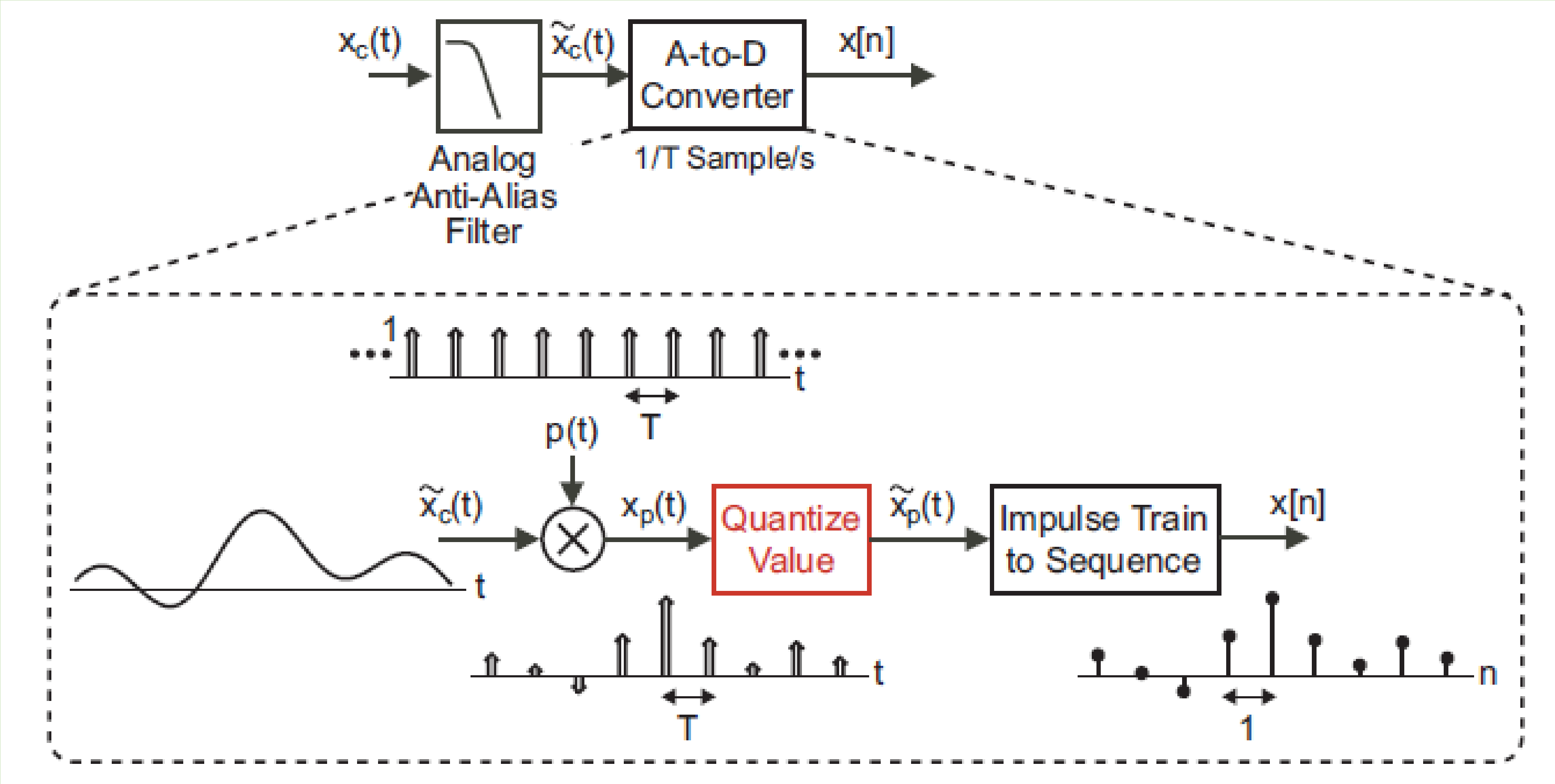


➔ Un chevauchement dans le domaine fréquentiel (c'est-à-dire un repliement) est évité si:

$$\frac{1}{T} - f_{bw} \geq f_{bw} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{T} \geq 2 f_{bw}}$$

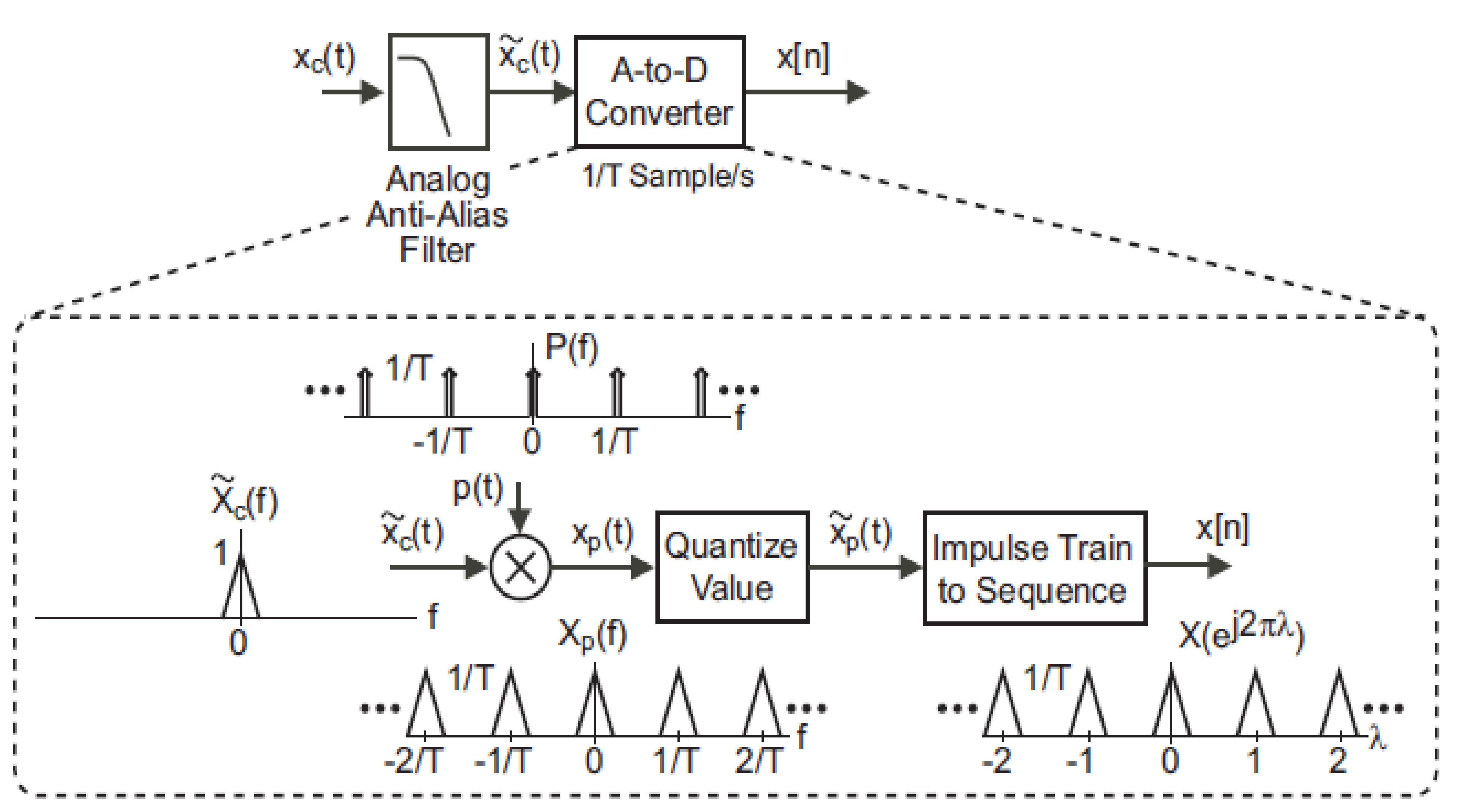
➔ Nous nous référons au minimum $1/T$ qui évite le repliement de spectre à la fréquence d'échantillonnage de Nyquist.

Convertisseur Analogique Numérique CAN



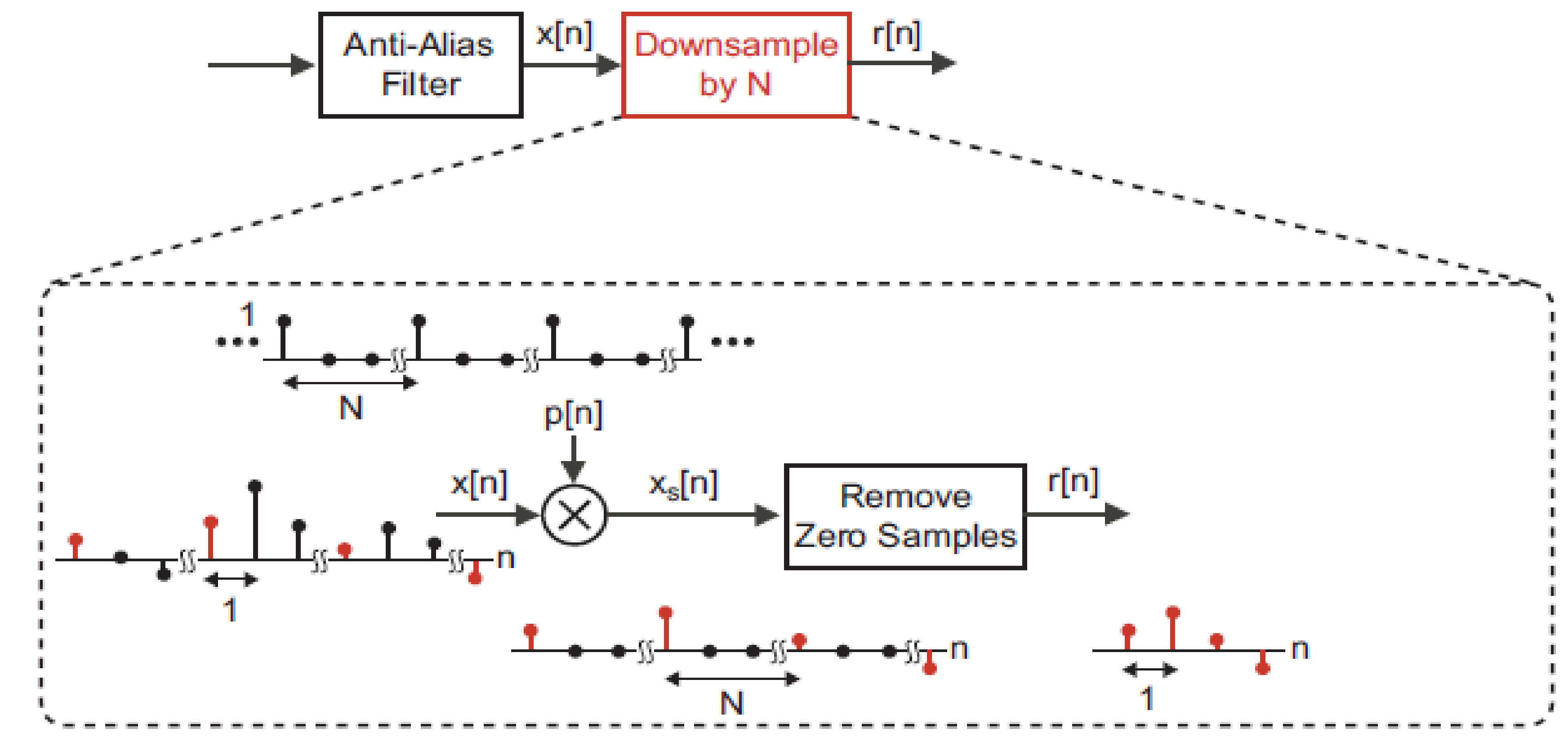
- ➔ Le CAN fonctionne avec un échantillonneur et un quantifieur;
- ➔ L'échantillonneur convertit le signal à entrée continue en une séquence discrète;
- ➔ Le quantifieur convertit le signal/la séquence à valeurs continues en un signal/une séquence à valeurs discrètes.

CAN dans le Domaine Fréquentiel



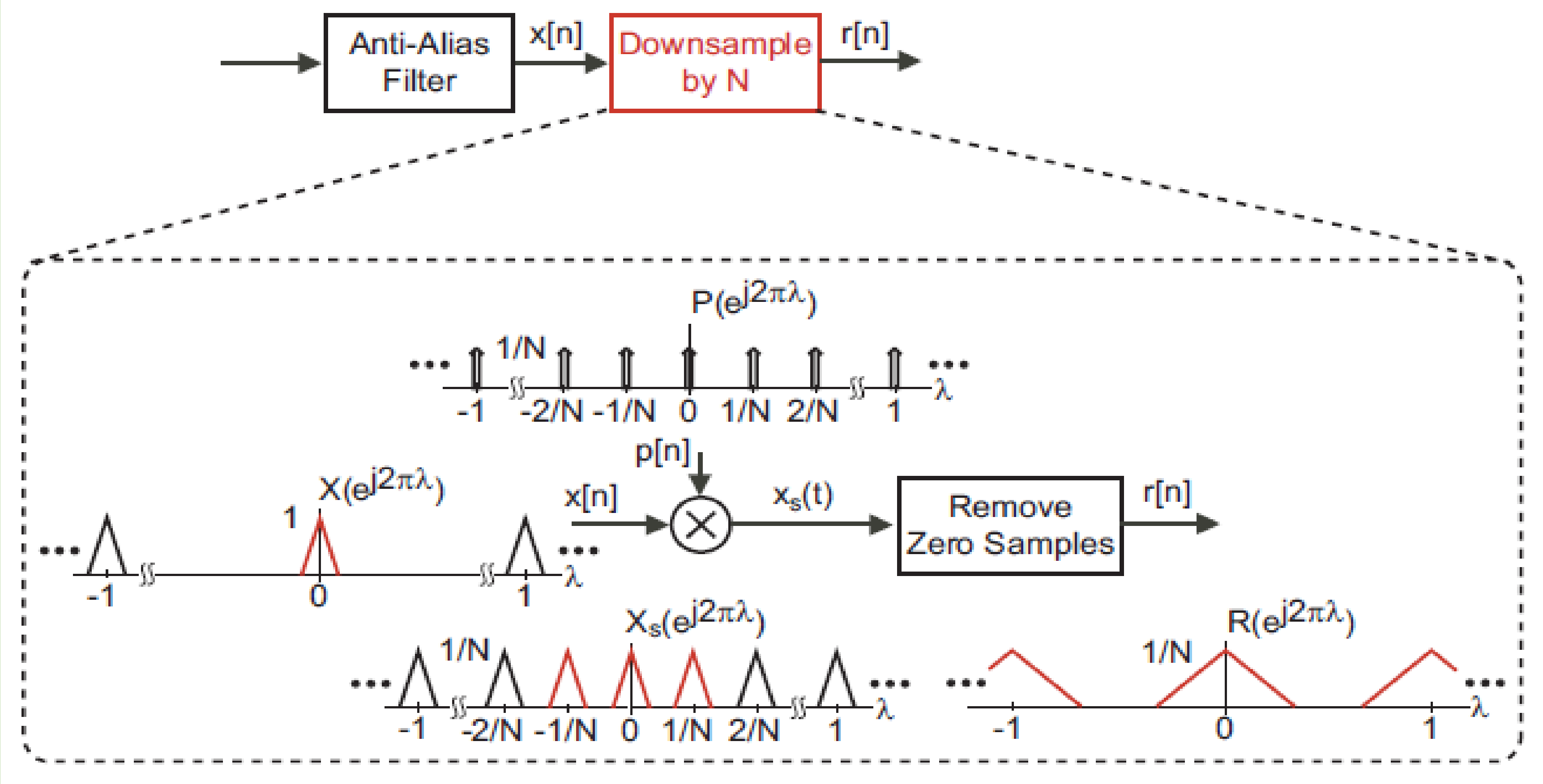
L'analyse du CAN est similaire à celle de l'échantillonneur.

Sous-échantillonnage



- ➔ Le sous-échantillonnage est similaire à l'échantillonnage, mais fonctionne sur des séquences numériques ;
- ➔ L'analyse est simplifiée en divisant l'opération en deux étapes à savoir:
  1. Multiplier l'entrée par une suite d'impulsions périodique de période N;
  2. Enlever tous les échantillons de la sortie ($x_s[n]$) associés aux échantillons à valeurs nulles.
- ➔ Cette opération revient à faire les mesures après changement d'échelle.

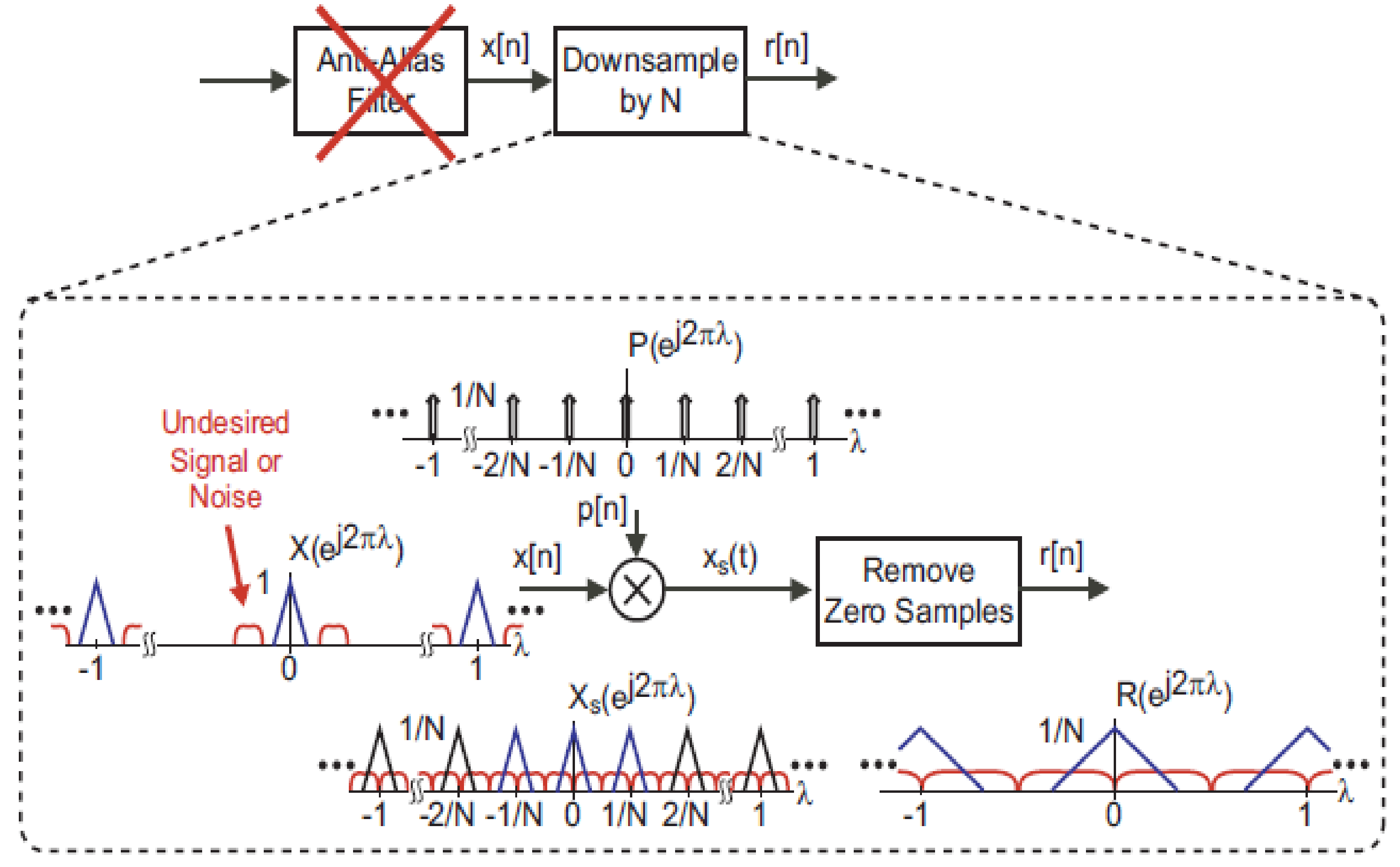
Sous-échantillonnage dans le domaine spectral



➔ La multiplication par une séquence d'impulsions conduit à une périodisation de la transformée de Fourier du signal d'entrée toutes les $1/N\ Hz$;

➔ L'élimination des échantillons zéros (c'est-à-dire la mise à l'échelle de l'axe temporel) conduit à une mise à l'échelle de l'axe des fréquences par le facteur N.

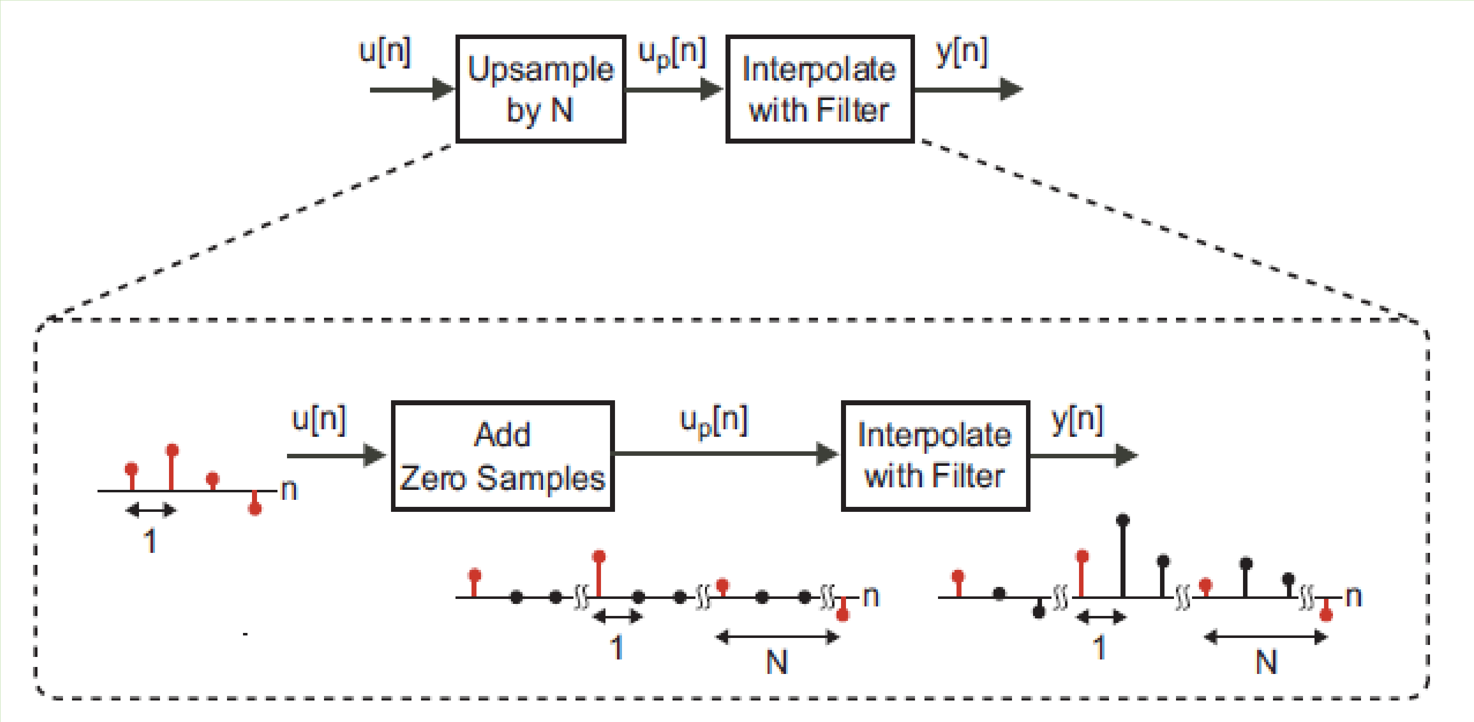
Filtrage anti-repliement



➔La suppression du filtre anti-repliement permettrait aux signaux non désirés ou au bruit d'intervenir dans la bande désirée du signal.

➔ Il faut bien choisir la bande passante appropriée du filtre passe-bas anti-repliement.

Sur-échantillonneur

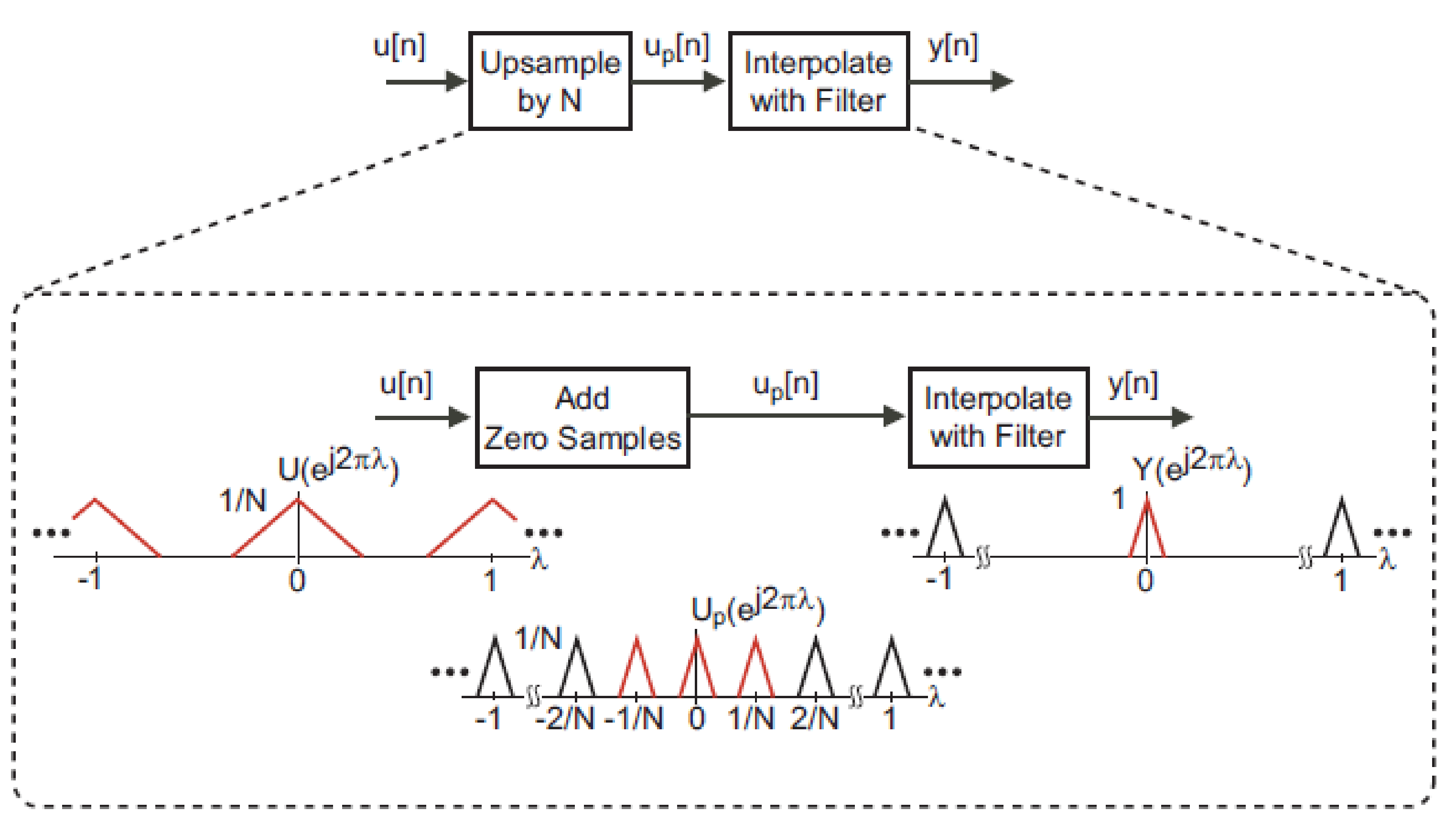


➔ Le sur-échantillonnage est un processus qui consiste en la réalisation de deux opérations :

1. Ajouter $N-1$ échantillons de valeurs « zéros » entre chaque deux échantillons de l'entrée; ➔ Changement de l'échelle de l'axe du temps par le facteur N;
2. Filtrer la séquence résultante, $u_p[n]$, afin de créer un ensemble d'échantillons de séquences variant d'une façon lisse.

➔ Le bon choix du filtre conduit à une interpolation entre les échantillons non-nuls de la séquence $u_p[n]$.

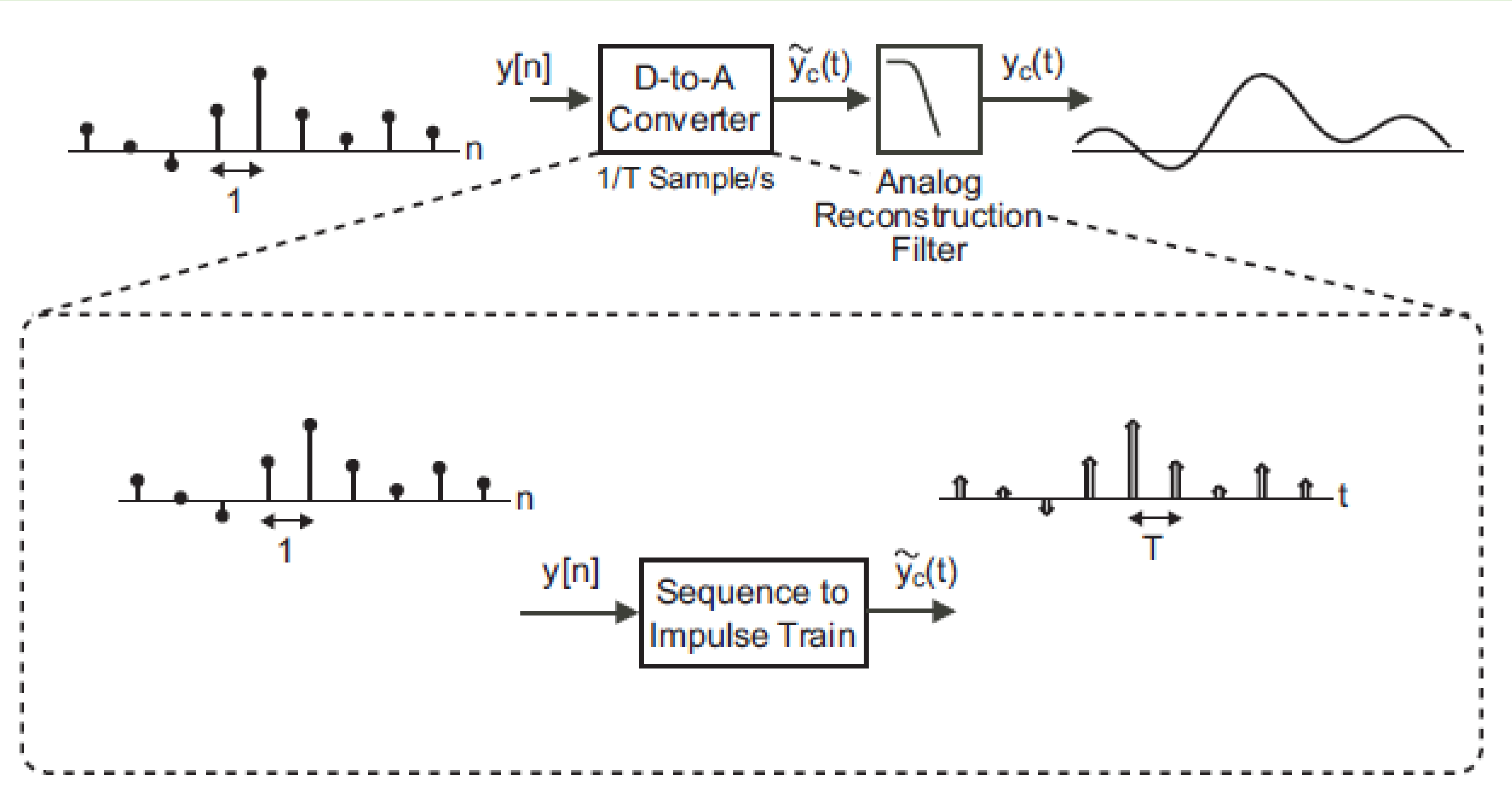
Sur-échantillonneur dans le domaine spectral



➔ L'ajout des échantillons « zéros » conduit à un changement d'échelle de l'axe des fréquences par le facteur $1/N$;

➔ Le filtre d'interpolation supprime toutes les copies de la transformée de Fourier du signal à l'exception de la copie en bande de base.

Convertisseur Numérique Analogique CNA



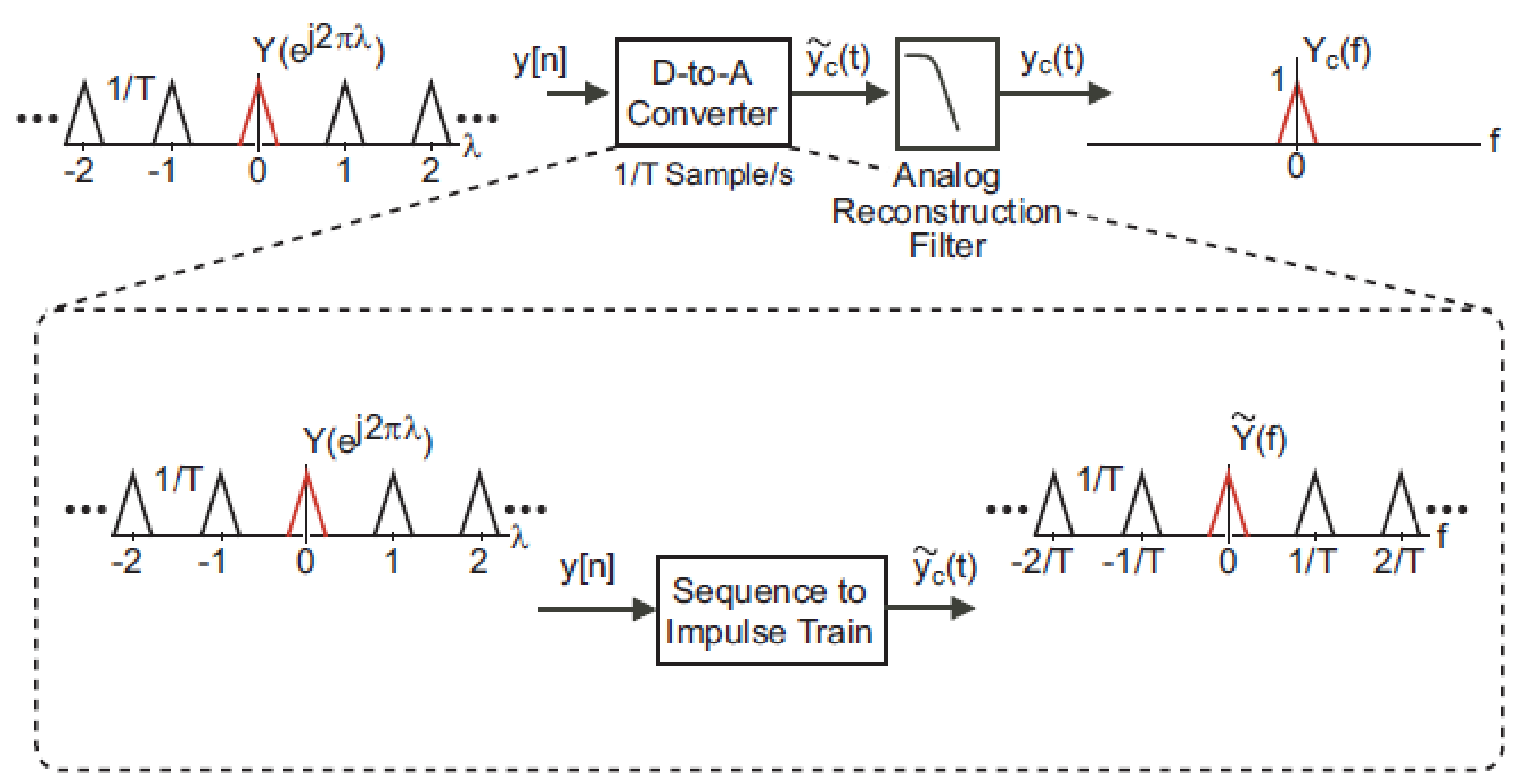
➔ Le modèle analytique simple du CNA comprend deux opérations:

➢ La conversion des échantillons de la séquence d'entrée en train d'impulsions;

➢ Le filtrage du train d'impulsions pour créer un signal variant d’une façon lisse.

➔ Le bon choix du filtre de reconstruction conduit à une interpolation entre les valeurs du train d'impulsions.

CNA dans le Domaine Fréquentiel



➔ La conversion de la séquence au train d'impulsions est équivalente à un changement d'échelle de l'axe des fréquences par un taux d'échantillonnage égal à $1/T$.

➔ Le filtre de reconstruction supprime toutes les copies de la transformée de Fourier du signal à l'exception de la copie en bande de base.

Traitement Multicadences – Applications

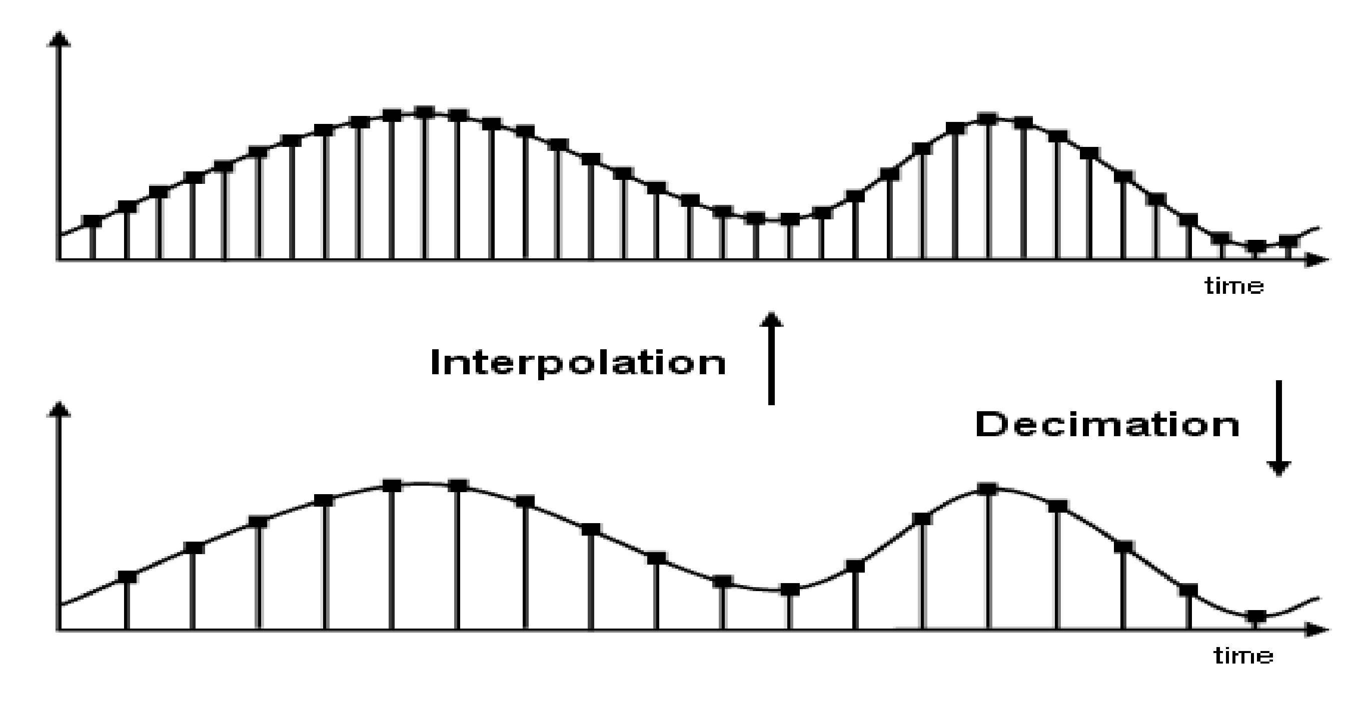
➔ Utilisé dans les convertisseurs CAN et CNA;

➔ Utilisé pour changer le taux d'un signal. Lorsque deux appareils, fonctionnant à des vitesses différentes doivent être interconnectés ➔ Il est nécessaire d'utiliser un changeur de taux entre eux;

➔ Utilisé dans l'interpolation;

➔ Certaines implémentations efficaces de filtres à un seul taux sont basées sur des méthodes multicadences;

➔Les bancs de filtres et les transformations en ondelettes dépendent fortement des méthodes multicadences.



Traitement Multicadences – Principes

Le **sur-échantillonneur**, représenté par le diagramme ci-contre, est défini par la relation :

$$y(n) = \begin{cases} x(n/2), & \textit{pour } n \textit{ pair} \\ 0, & \textit{pour } n \textit{ impair} \end{cases}$$

$$x(n) \longrightarrow \uparrow 2 \longrightarrow y(n)$$

La notation habituelle du sur-échantillonneur est:

$$y(n) = [\uparrow 2]\, x(n).$$

Comme nous l'avons déjà vu, le sur-échantillonneur insère simplement des zéros entre les échantillons. Par exemple, si $x(n)$ est la séquence donnée par :

$$x(n) = \{\ldots,\ 3,\ \underline{5},\ 2,\ 9,\ 6,\ \ldots\}$$

où le nombre souligné représente $x(0)$, alors $y(n)$ est donné par:

$$y(n) = [\uparrow 2]\, x(n) = \{\ldots,\ 0,\ 3,\ 0,\ \underline{5},\ 0,\ 2,\ 0,\ 9,\ 0,\ 6,\ 0,\ \ldots\}.$$

Étant donné $X(z)$, quelle est la forme de $Y(z)$?

$$X(z) = \cdots + 3\,z + 5 + 2\,z^{-1} + 9\,z^{-2} + 6\,z^{-3} + \cdots$$

$$Y(z) = \cdots + 3\,z^{2} + 5 + 2\,z^{-2} + 9\,z^{-4} + 6\,z^{-6} + \cdots$$

Traitement Multicadences – Principes

Il est clair donc que: $\boxed{Y(z) = \mathcal{Z}\{[\uparrow 2]\, x(n)\} = X(z^2).}$

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_n y(n)\, z^{-n} \\ &= \sum_{n \text{ even}} x(n/2)\, z^{-n} \\ &= \sum_n x(n)\, z^{-2n} \\ &= X(z^2). \end{aligned}$$

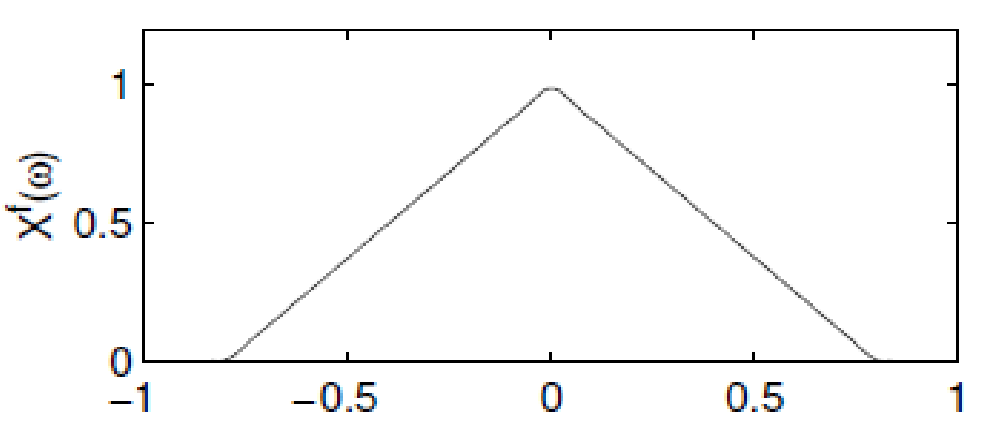
Nous pouvons aussi dériver ceci en utilisant le développement ci-contre.

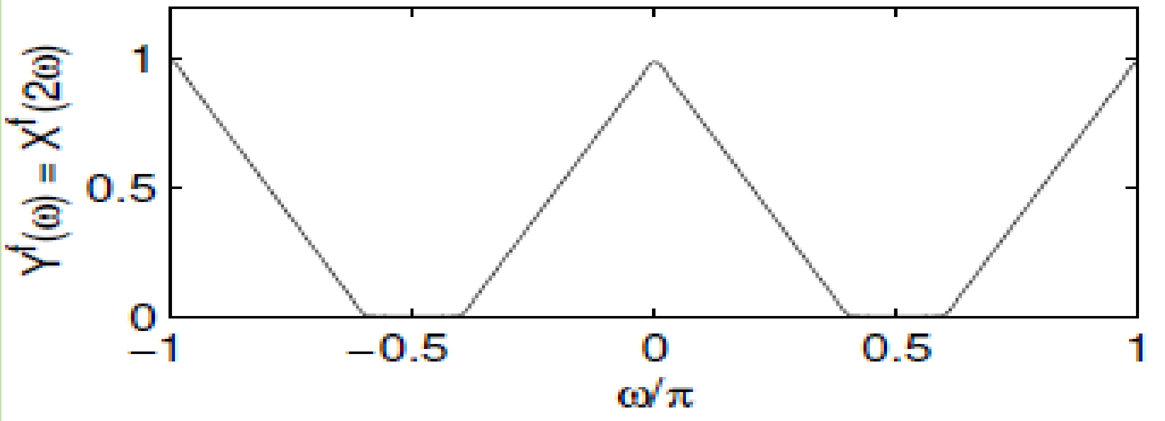
Comment le sur-échantillonnage affecte-t-il la transformée de Fourier d'un signal?

La transformée de Fourier discrète de $y(n)$ est donnée par:

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= X(z^2)\big|_{z=e^{j\omega}} \\ &= X((e^{j\omega})^2) \end{aligned}$$

$\rightarrow$ $\boxed{Y(e^{j\omega}) = X(e^{j2\omega}).}$ Où: $\boxed{Y^f(\omega) = \mathrm{DTFT}\{[\uparrow 2]\, x(n)\} = X^f(2\omega).}$





Traitement Multicadences – Principes

Cas général : un sur-échantillonneur de degré « ***L*** » est représenté par le diagramme suivant:

$$x(n) \longrightarrow \uparrow L \longrightarrow y(n)$$

$$y(n) = \begin{cases} x(n/L), & pour\ n\ multiple\ de\ L \\ 0, & Ailleurs \end{cases}$$

Ce sur-échantillonneur insère simplement "***L***" zéros entre les échantillons. Par exemple, si $x(n)$ est la séquence donnée par :

$$x(n) = \{\ldots,\ 3,\ \underline{5},\ 2,\ 9,\ 6,\ \ldots\}$$

Sur-échantillonné cette séquence par un facteur ***L = 4***, revient à créer la séquence suivante:

$$\begin{aligned} y(n) &= [\uparrow 4]\, x(n) \\ &= \{\ldots,\ 0,\ 3,\ 0,\ 0,\ 0,\ \underline{5},\ 0,\ 0,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 9,\ 0,\ 0,\ 0,\ 6,\ 0,\ \ldots\}. \end{aligned}$$

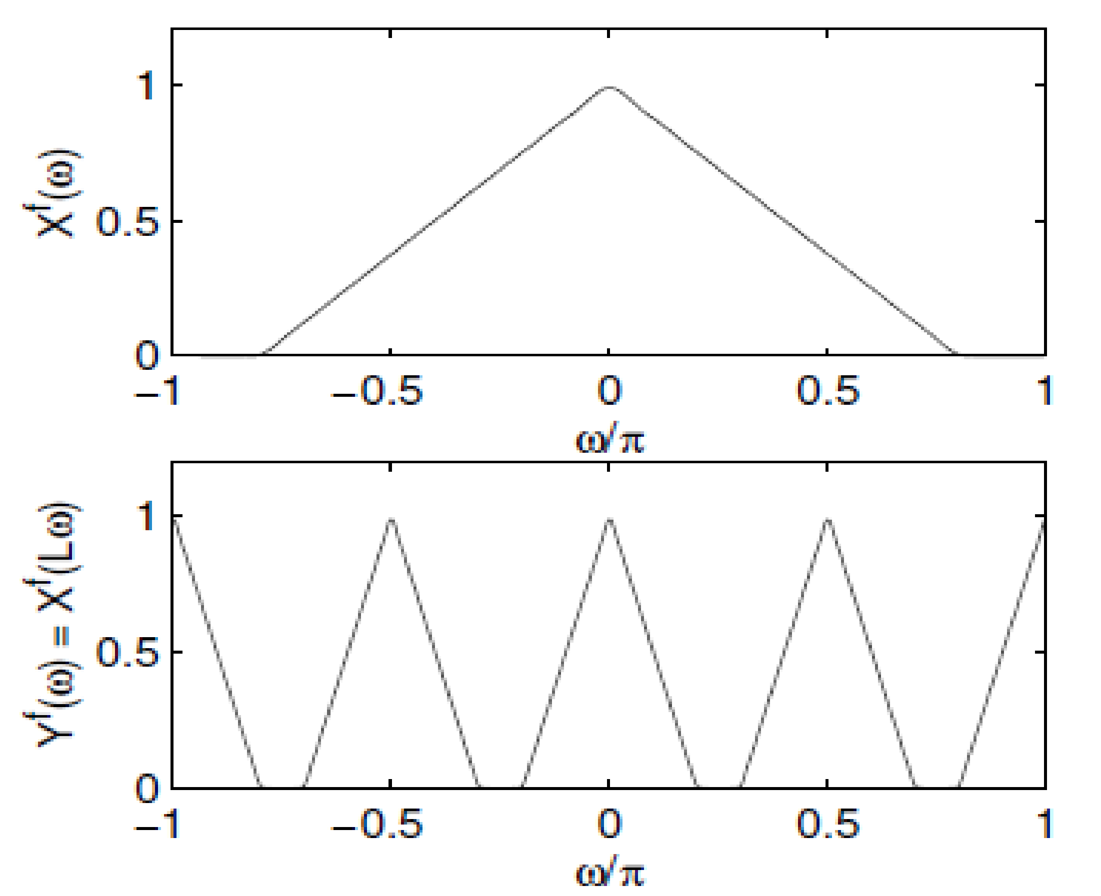
Traitement Multicadences – Principes

Similairement, nous avons:

$$\boxed{Y(z) = \mathcal{Z}\left\{[\uparrow L]\, x(n)\right\} = X(z^L),}$$

$$\boxed{Y(e^{j\omega}) = X(e^{jL\omega}),}$$

$$\boxed{Y^f(\omega) = \mathrm{DTFT}\left\{[\uparrow L]\, x(n)\right\} = X^f(L\omega).}$$



Remarques concernant le sur-échantillonnage:

1. Aucune information n'est perdue lorsqu'un signal est sur-échantillonné;
2. Le sur-échantillonneur est un système linéaire;
3. Le sur-échantillonneur est un système variant dans le temps;
3. Le sur-échantillonneur introduit des images spectrales.

Traitement Multicadences – Principes

Le sous-échantillonneur, représenté par le diagramme suivant, est défini comme suit:

$$y(n) = x(2\,n).$$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\downarrow 2} \longrightarrow y(n)$$

La notation usuelle est donnée comme suit: $y(n) = [\downarrow 2]\, x(n).$

Le sous-échantillonneur garde simplement tous les deux échantillons et rejette les autres. Par exemple, si *x(n)* est la séquence donnée par:

$$x(n) = \{\ldots,\ 7,\ 3,\ \underline{5},\ 2,\ 9,\ 6,\ 4,\ \ldots\}$$

où le nombre souligné représente $x(0)$, alors $y(n)$ est donné par:

$$y(n) = [\downarrow 2]\, x(n) = \{\ldots,\ 7,\ \underline{5},\ 9,\ 4,\ \ldots\}.$$

Étant donné $X(z)$, quelle est la forme de $Y(z)$? ➔ Ce n'est pas aussi simple que pour le cas du sur-échantillonneur.

$$X(z) = \cdots + 7\,z^2 + 3\,z + 5 + 2\,z^{-1} + 9\,z^{-2} + 6\,z^{-3} + 4\,z^{-4} + \cdots$$

$$Y(z) = \cdots + 7\,z + 5 + 9\,z^{-1} + 4\,z^{-2} + \cdots$$

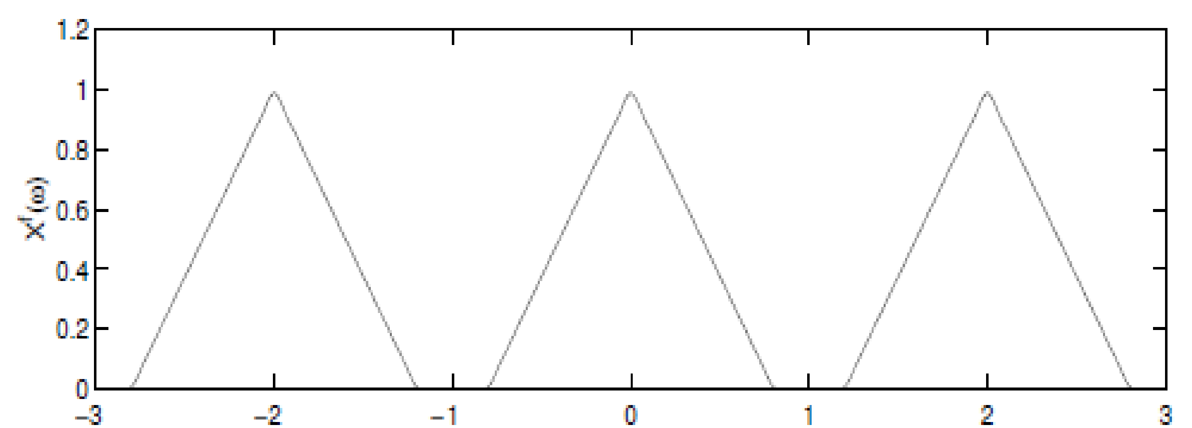
$$\boxed{Y(z) = \mathcal{Z}\left\{[\downarrow 2]\, x(n)\right\} = \frac{X(z^{\frac{1}{2}}) + X(-z^{\frac{1}{2}})}{2}}$$

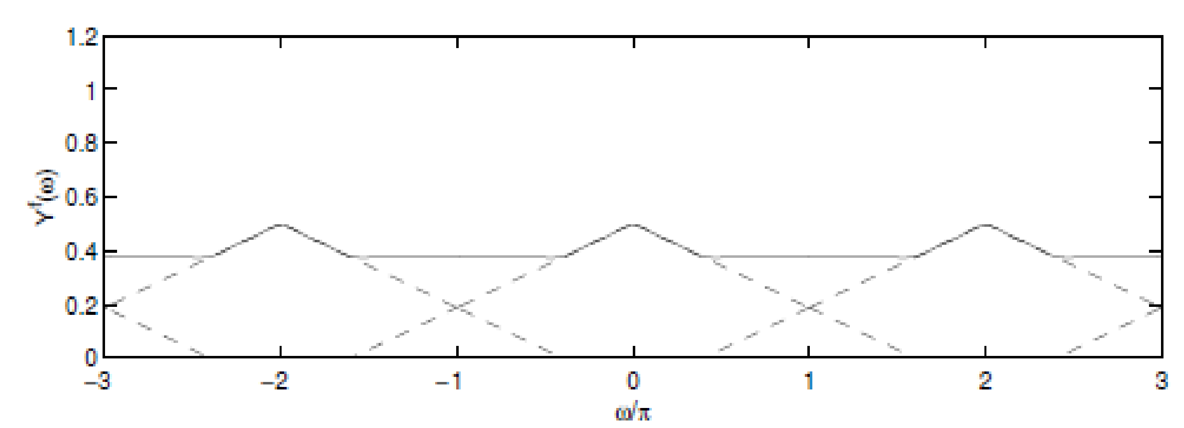
Traitement Multicadences – Principes

Concernant la transformée de Fourier, nous avons:

$$
\begin{aligned}
Y(e^{j\omega}) &= \left.\frac{X(z^{\frac{1}{2}}) + X(-z^{\frac{1}{2}})}{2}\right|_{z=e^{j\omega}} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + X(-e^{j\frac{\omega}{2}})\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + X(e^{-j\pi}\,e^{j\frac{\omega}{2}})\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + X(e^{j(\frac{\omega}{2}-\pi)})\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(X^f(\frac{\omega}{2}) + X^f(\frac{\omega-2\pi}{2})\right)
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{Y^f(\omega) = \mathrm{DTFT}\left\{[\downarrow 2]\,x(n)\right\} = \frac{1}{2}\cdot\left(X^f(\frac{\omega}{2}) + X^f(\frac{\omega-2\pi}{2})\right)}
$$





Lorsqu'un signal $x(n)$ est sous-échantillonné, son spectre peut chevaucher avec les copies répétées (repliement). Lorsque le repliement se produit, le signal $x(n)$ ne peut pas être récupéré après l'opération du sous-échantillonnage. Dans ce cas, l'information est perdue. Si le spectre de $x(n)$ *est* nul pour $\frac{\pi}{2} \leq |w| \leq \pi$, il n'y aura pas de chevauchement, et on peut récupérer $x(n)$.

Traitement Multicadences – Principes

Cas général : un sous-échantillonneur de facteur M est représenté par le diagramme suivant:

$$x(n) \longrightarrow \downarrow M \longrightarrow y(n)$$

➔ $y(n) = x(Mn)$

Ce sous-échantillonneur ne conserve que tous les "$Mieme$" échantillons.
Par exemple, si $x(n)$ est la séquence donnée par:

$$x(n) = \{\ldots,\ 8,\ 7,\ 3,\ \underline{5},\ 2,\ 9,\ 6,\ 4,\ 2,\ 1,\ \ldots\}$$

Sous-échantillonné cette séquence par un facteur M = 3, revient à créer la séquence suivante:

$$y(n) = [\downarrow 3]\, x(n) = \{\ldots,\ 8,\ \underline{5},\ 6,\ 1,\ \ldots\}.$$

Similairement, nous avons:

$$\boxed{Y(z) = \mathcal{Z}\{[\downarrow M]\, x(n)\} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(W^k z^{\frac{1}{M}})}$$

$$W = e^{j\frac{2\pi}{M}}$$

$$\boxed{Y^f(\omega) = \mathrm{DTFT}\{[\downarrow M]\, x(n)\} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X^f\left(\frac{\omega - 2\pi\, k}{M}\right).}$$

Remarques
1. En général, les informations sont perdues lorsqu'un signal est sous-échantillonné.
2. Le sous-échantillonneur est un système linéaire mais pas invariant dans le temps.
3. En général, le sous-échantillonneur provoque un repliement.