Université de Mohamed BOUDIAF – Msila
Faculté de Technologie
Département d'Electronique

**Matière : Traitement Avancé du Signal 01**
**M1 – Instrumentation**

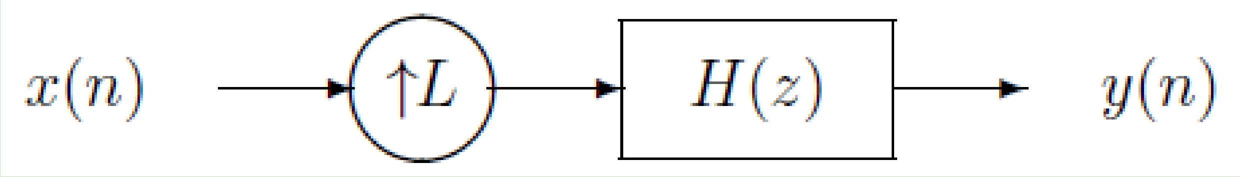
# Chapitre 4 : Traitement Multicadences – Partie 2

Pr. Khaled ROUABAH

Année universitaire 2023/2024

# Traitement Multicadences – Changement du Taux d’un signal

Les sur-échantillonneurs et les sous-échantillonneurs sont généralement utilisés avec des filtres.
Par exemple, pour changer le taux d'un signal, il est nécessaire d'utiliser des filtres passe-bas en plus du sur-échantillonneur et du sous-échantillonneur.
Le système suivant est utilisé pour l'interpolation.



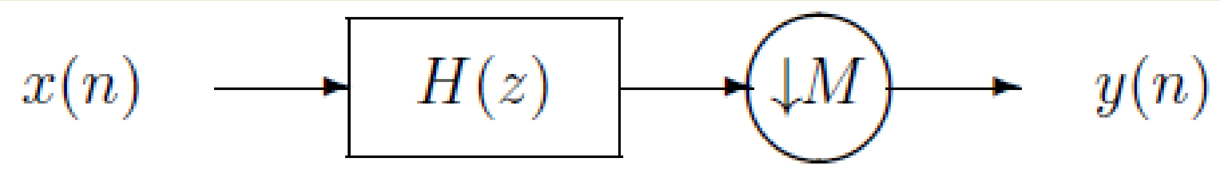

La combinaison sur-échantillonnage et filtrage peut s’écrire comme suit:

$$\boxed{y(n) = ([\uparrow L]\, x(n)) * h(n) = \sum_{k} x(k)\, h(n - L\,k).}$$

Le filtre remplit les zéros introduits par le sur-échantillonneur. De manière équivalente, il est conçu pour supprimer les images spectrales. Il doit être un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure $W_0 = \frac{\pi}{L}$. Dans ce contexte, le filtre passe-bas est souvent appelé filtre d'interpolation.

# *Traitement Multicadences – Changement du Taux d’un signal*

Le système suivant est utilisé pour la décimation:



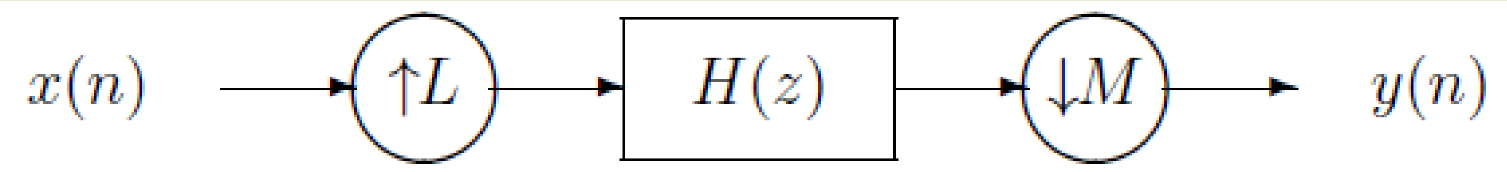

La combinaison sous-échantillonnage et filtrage peut être écrite comme suit:

$$\boxed{y(n) = [\downarrow M]\,(x(n) * h(n)) = \sum_k x(k)\,h(M\,n - k).}$$

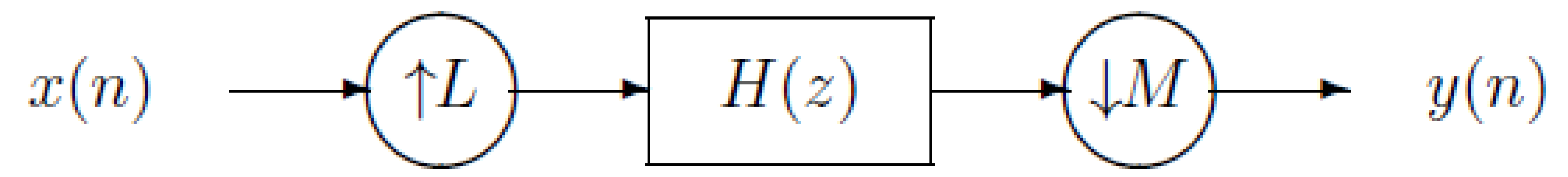
Le filtre est conçu pour éviter le repliement. Il doit être un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure $W_0 = \frac{\pi}{M}$. Dans ce contexte, le filtre passe-bas est souvent appelé filtre anti-repliement.

Un changement de taux fractionnaire (comme 2/3) peut être obtenu en cascadant un système d'interpolation avec un système de décimation. Ensuite, au lieu d'implémenter deux filtres séparés en cascade, on peut mettre en œuvre un seul filtre.

La structure suivante est utilisée pour le changeur de taux fractionnaire :



## Changeur de taux fractionnaire – Suite

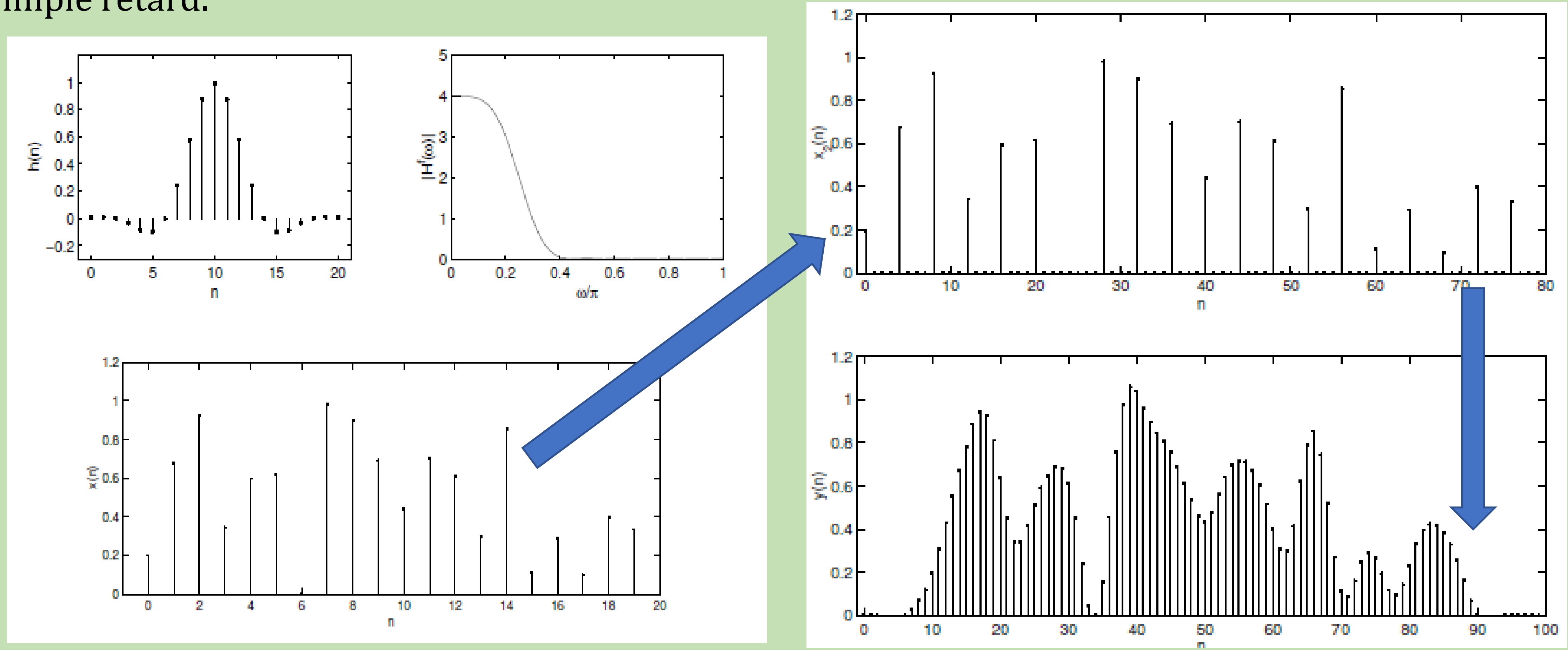



Le filtre est conçu pour éliminer à la fois les images spectrales et éviter le repliement. La cascade de deux filtres passe-bas idéaux est à nouveau un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure qui est le minimum des deux fréquences de coupure. Donc, dans ce cas, la fréquence de coupure doit être

$$\boxed{\omega_o = \min\left\{\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{M}\right\}.}$$

# *Traitement Multicadences – Exemple d’Interpolation*

Dans cet exemple, nous réaliserons une interpolation d’un signal x(n) (d'un facteur 4), en utilisant le système d'interpolation décrit précédemment. Nous utilisons un filtre FIR passe-bas à phase linéaire de type I de longueur 21 pour suivre le sur-échantillonneur. Notez que puisque le filtre est causal, un retard est introduit par le système d'interpolation. Dans ce cas *y(n)* peut être aligné avec *x(n)* par un simple retard.



# Traitement Multicadences – Filtre demi bande

Lors de l'interpolation d'un signal x(n), le filtre d'interpolation h(n) modifie généralement les échantillons de x(n) en plus de l'ajout des zéros.
Est-ce que le filtre d'interpolation peut être conçu de manière à conserver les échantillons originaux x(n). Si par exemple: $y(n) = h(n) * [\uparrow 2]\, x(n)$

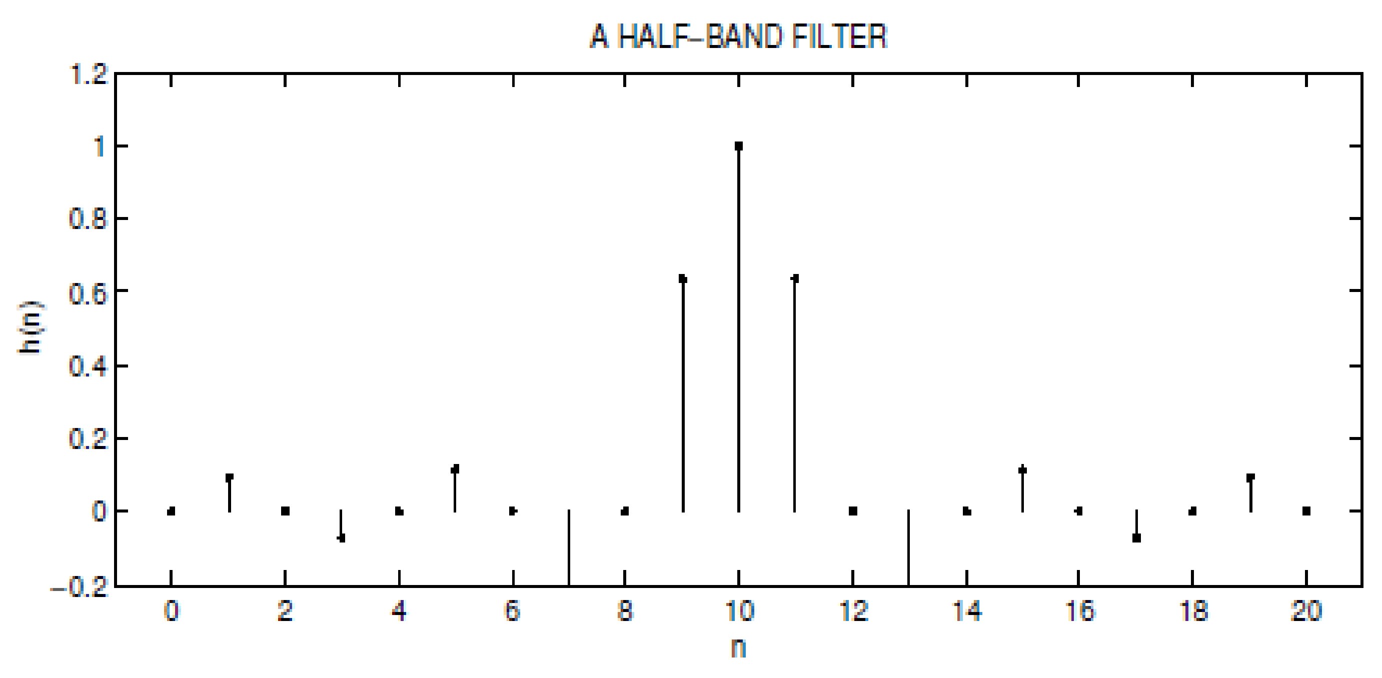
➔ Pouvons-nous concevoir h(n) de sorte que y(2n) = x(n)?, ou plus généralement: $\boxed{y(2n + n_o) = x(n)}$

➔ Il s'avère que c'est possible.

➔ Si h(n) caractérise un filtre demi-bande ➔ Pas de changement sur les échantillons de x(n).

➔ Un filtre demi-bande non centré h(n) est un filtre qui satisfait:

$$h(n) = \begin{cases} 1, & \text{for } n = n_o \\ 0, & \text{for } n = n_o \pm 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$




Pour $n_0 = 0$ ➔

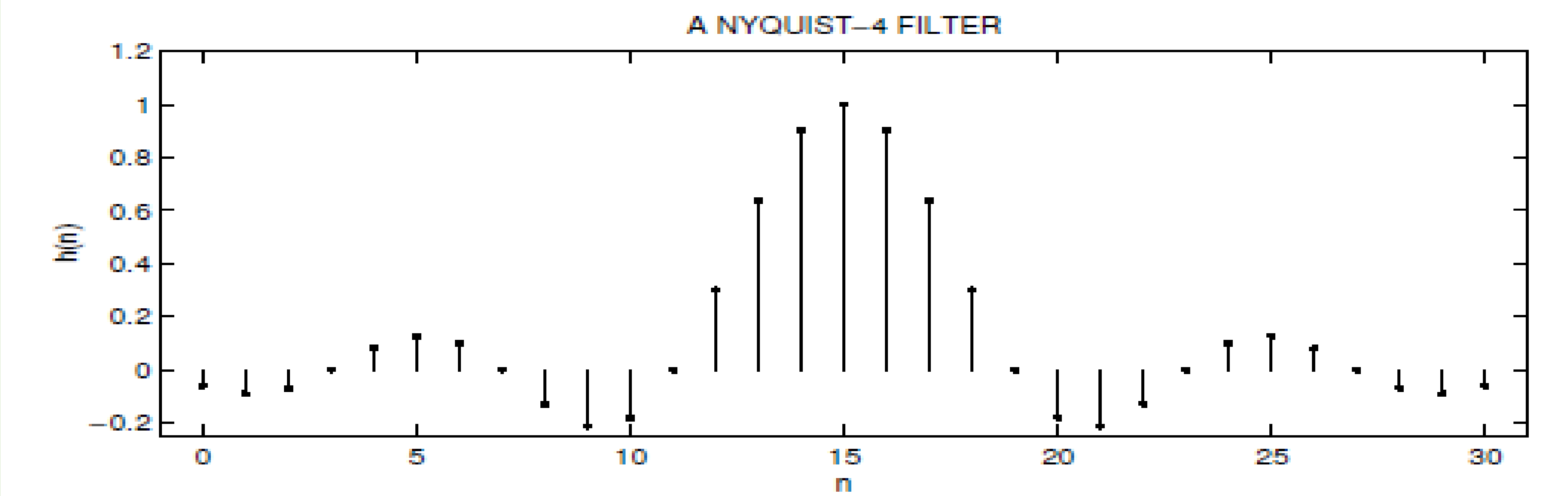
$$H(z) = 1 + z^{-1}\, H_1(z^2).$$

$H_1(z)$ contient les échantillons impairs de $h(n)$.

# Traitement Multicadences – Filtre de Nyquist

Lors de l'interpolation d'un signal x(n) par un facteur $L$, les échantillons originaux de x(n) sont conservés si le filtre d'interpolation h(n) est un filtre Nyquist-L. Un filtre Nyquist-L est une généralisation de la notion de filtre demi-bande pour L> 2. Un filtre de Nyquist-L (centré sur 0) est celui pour lequel nous avons: $\boxed{h(L\,n) = \delta(n).}$

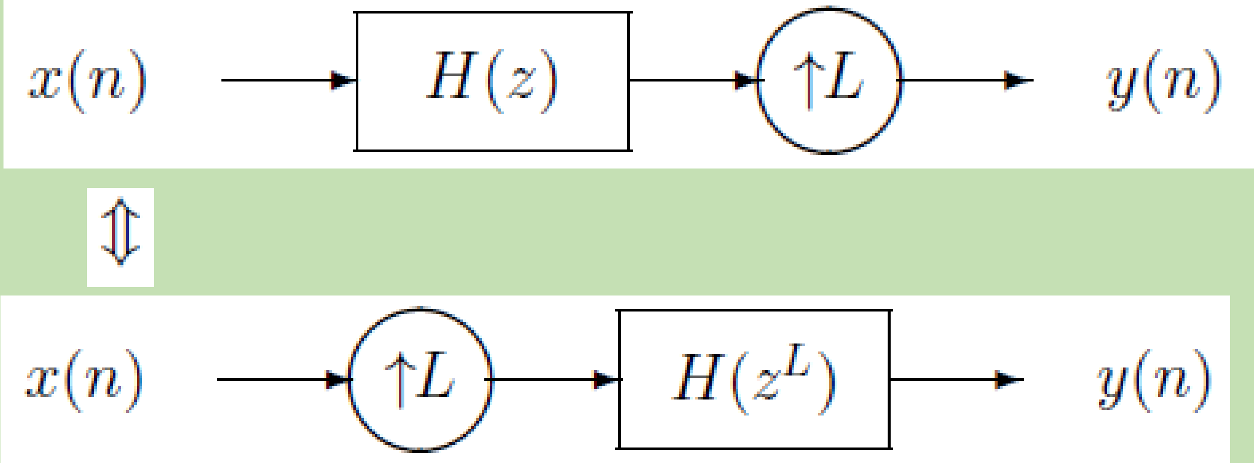
Un filtre Nyquist-4 est montré dans la figure suivante.



# Traitement Multicadences – L’Identité Noble pour le sur-échantillonneur

Les deux équivalences, montrées dans les schémas blocs suivants sont parfois appelées les identités Noble.
Il est possible d’inverser l'ordre d'un sur-échantillonneur avec celui du filtre.
Il y a deux cas:

1. Si le sur-échantillonneur vient après le filtre, on peut inverser l'ordre du filtre et du sur-échantillonneur, mais le filtre doit être modifié comme indiqué sur la figure.
2. Si le sur-échantillonneur vient avant le filtre, on ne peut pas inverser l'ordre du filtre et du sur-échantillonneur, sauf si le filtre est de la forme spéciale $H(z^L)$.

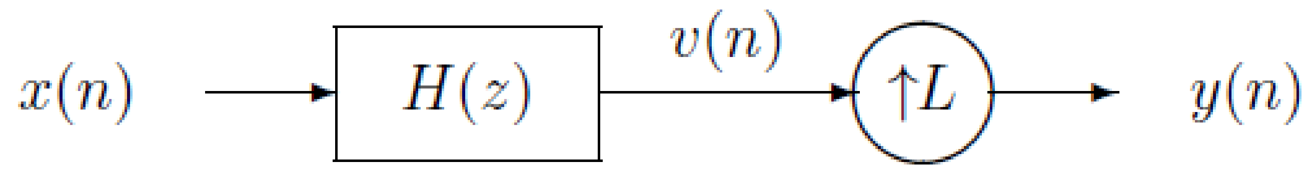



De manière équivalente:

$$\boxed{[\uparrow L]\ (h(n) * x(n)) = [\uparrow L]\, h(n) * [\uparrow L]\, x(n)}$$

# Traitement Multicadences – L'Identité Noble pour le sur-échantillonneur

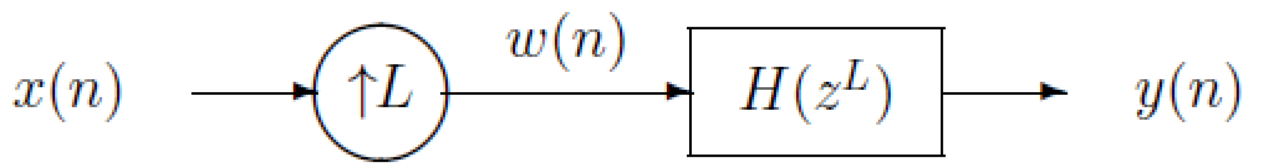
**Démonstration pour le cas général:** Dans la figure suivante, le signal intermédiaire v(n) est représenté.




En utilisant la transformée en Z, nous avons: $V(z) = H(z)\, X(z)$ et $Y(z) = V(z^L)$

Par conséquent: $Y(z) = H(z^L)\, X(z^L).$

Considérons maintenant le système que nous prétendons être équivalent. Dans la figure suivante, le signal intermédiaire *w(n)* est représenté.




En utilisant la transformée Z, nous avons: $W(z) = X(z^L)$ et $Y(z) = H(z^L)\, W(z)$

Par conséquent: $Y(z) = H(z^L)\, X(z^L)$

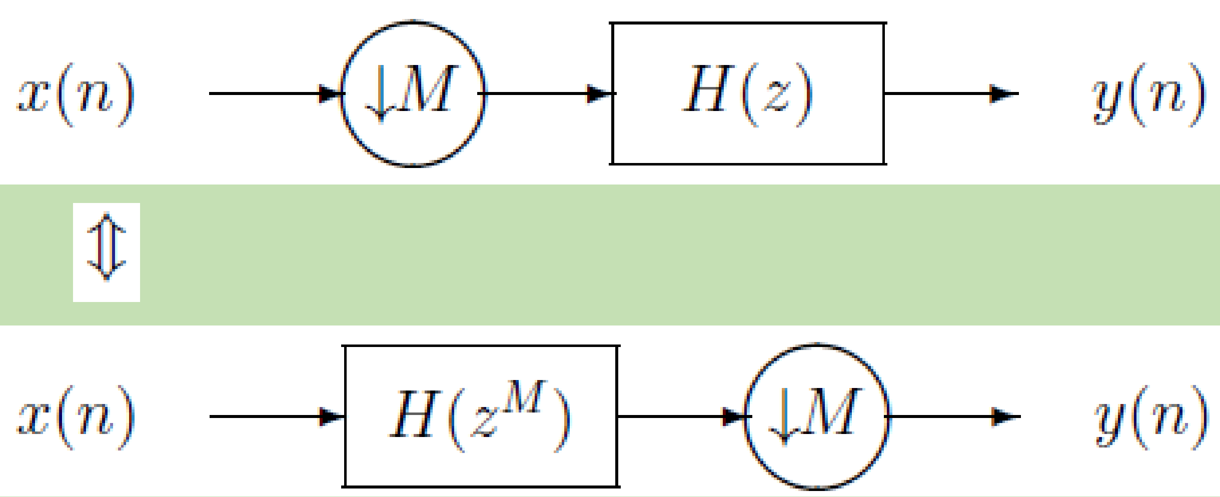
➔ Ce qui montre que les systèmes sont équivalents.

# Traitement Multicadences – L’Identité Noble pour le sous-échantillonneur

Il est possible d’inverser l'ordre d'un sous-échantillonneur avec celui du filtre. Il y a deux cas:

1. Si le sous-échantillonneur vient avant le filtre, on peut inverser l'ordre du filtre et du sous-échantillonneur, mais le filtre doit être modifié comme indiqué sur la figure.
2. Si le sous-échantillonneur vient après le filtre, on ne peut pas inverser l'ordre du filtre et du sous-échantillonneur, sauf si le filtre est de la forme spéciale $H(z^M)$.

Ceci peut être résumé par la figure suivante.



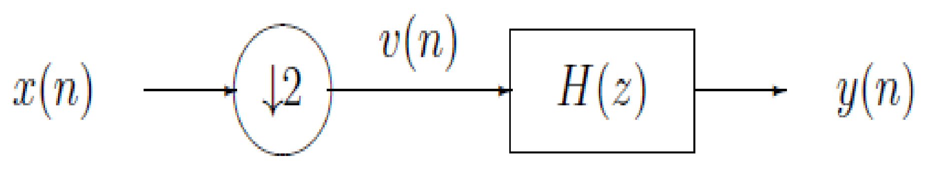

De manière équivalente:

$$\boxed{h(n) * [\downarrow M]\, x(n) = [\downarrow M]\ ([\uparrow M]\, h(n) * x(n))}$$

# Traitement Multicadences – L'Identité de Noble pour le sous-échantillonneur

**Démonstration pour M = 2**.

Dans la figure suivante, le signal intermédiaire v (n) est représenté.



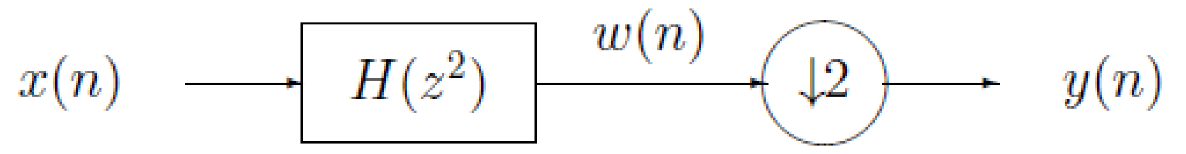

En utilisant la transformée en Z, nous avons:

$$V(z) = \frac{1}{2}X(z^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}X(-z^{\frac{1}{2}}) \quad \text{et} \quad Y(z) = H(z)V(z)$$

Et par conséquent:

$$Y(z) = \frac{1}{2}H(z)\,X(z^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}H(z)\,X(-z^{\frac{1}{2}})$$

Considérons maintenant le système que nous prétendons être équivalent. Dans la figure suivante, le signal intermédiaire w(n) est représenté.




En utilisant la transformée en Z, nous avons:

$$W(z) = H(z^2)\,X(z) \quad \text{et} \quad Y(z) = \frac{1}{2}W(z^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}W(-z^{\frac{1}{2}})$$

Et par conséquent:

$$Y(z) = \frac{1}{2}H(z)\,X(z^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}H(z)\,X(-z^{\frac{1}{2}}).$$

➔ Ce qui montre que les systèmes sont équivalents.

# Traitement Multicadences – Décomposition Polyphasée

La décomposition polyphasée d'un signal est simplement la séparation des échantillons pairs et impairs donnés comme suit:

$$x_0(n) = x(2n) \qquad x_1(n) = x(2n+1).$$

Dans ce cas, X(z), la transformée en Z de x(n), est donnée par: $\boxed{X(z) = X_0(z^2) + z^{-1} X_1(z^2)}$

$X_0(z)$ et $X_1(z)$ sont respectivement les transformées en Z de $x_0(n)$ et $x_1(n)$.

Par exemple, si : $x(n)$ est donnée par: $x(n) = \{\underline{3},\ 1,\ 5,\ 6,\ 2,\ 4,\ -3,\ 7\}$

Alors, les composantes polyphasées sont données par:

$$x_0(n) = \{\underline{3},\ 5,\ 2,\ -3\} \qquad x_1(n) = \{\underline{1},\ 6,\ 4,\ 7\}.$$

Les transformées en Z pour cet exemple sont données par:

$$X(z) = 3 + z^{-1} + 5z^{-2} + 6z^{-3} + 2z^{-4} + 4z^{-5} - 3z^{-6} + 7z^{-7}$$

$$X_0(z) = 3 + 5z^{-1} + 2z^{-2} - 3z^{-3}$$

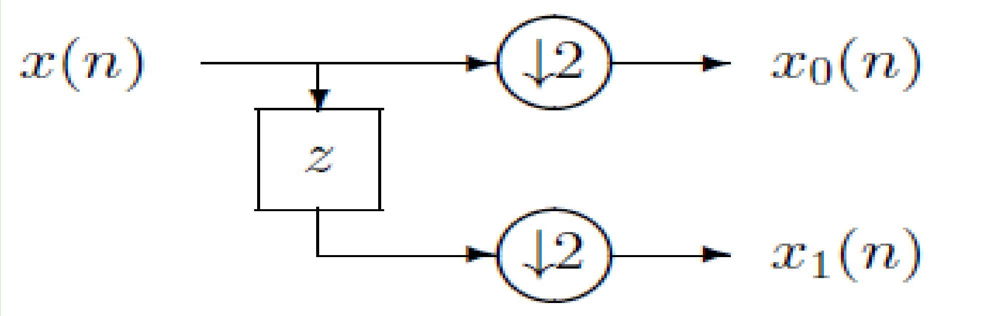
$$X_1(z) = 1 + 6z^{-1} + 4z^{-2} + 7z^{-3}.$$

# *Traitement Multicadences – Décomposition Polyphasée*

$X_0(z)$ et $X_1(z)$ peuvent être obtenus à partir de $X(z)$ comme suit:

$$X_0(z^2) = \frac{1}{2}\left(X(z) + X(-z)\right)$$
$$X_1(z^2) = \frac{z}{2}\left(X(z) - X(-z)\right).$$

Les composantes polyphasées $x_0(n)$ et $x_1(n)$ peuvent être obtenues avec la structure suivante.




**Cas général**: La décomposition polyphasée de $x(n)$ est donnée par:

$$\begin{aligned} x_0(n) &= x(Mn) \\ x_1(n) &= x(Mn+1) \\ &\vdots \\ x_{M-1}(n) &= x(Mn+M-1). \end{aligned}$$

# Traitement Multicadences – Implémentation efficace

X(z), la transformée en Z de x(n), est donnée par:

$$X(z) = X_0(z^M) + z^{-1} X_1(z^M) + \cdots + z^{-(M-1)} X_{M-1}(z^M)$$

$X_i(z)$ est la transformée en Z de $x_i(z)$. La composante polyphasée $X_i(z)$ peut être obtenue à partir de $X(z)$ avec:

$$X_i(z^M) = \frac{z^i}{M} \sum_{k=0}^{M-1} W^{ik} X(W^k z) \qquad W = e^{j\frac{2\pi}{M}}.$$

L'identité Noble et la décomposition polyphasée peuvent être combinées afin d'obtenir des structures de traitement multicadences très efficaces.

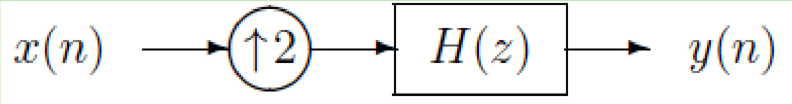
Par exemple, considérons un système d'interpolation dans lequel un sur-échantillonneur est suivi par un filtre.

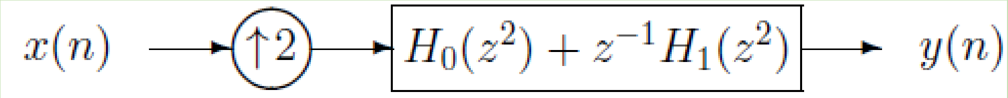
➔ Le sur-échantillonneur ajoute des zéros entre les échantillons de x(n) ➔ Deux inconvénients sont présents:

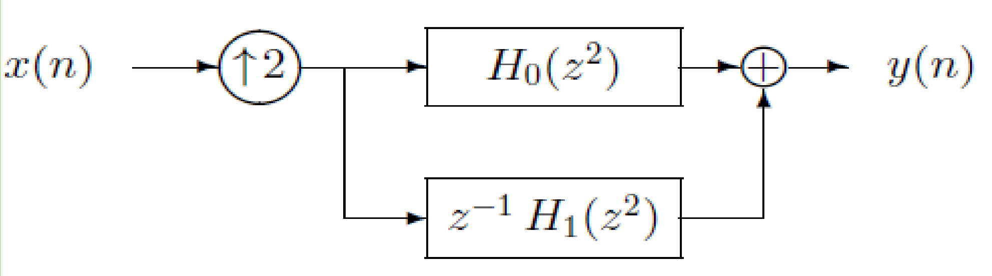
1. La moitié des échantillons à l'entrée du filtre sont nuls ➔ Par conséquent, le filtre va réaliser des opérations non nécessaires (Multiplication par zéros et additions de zéros).
2. Le filtre opère à une cadence très élevée.

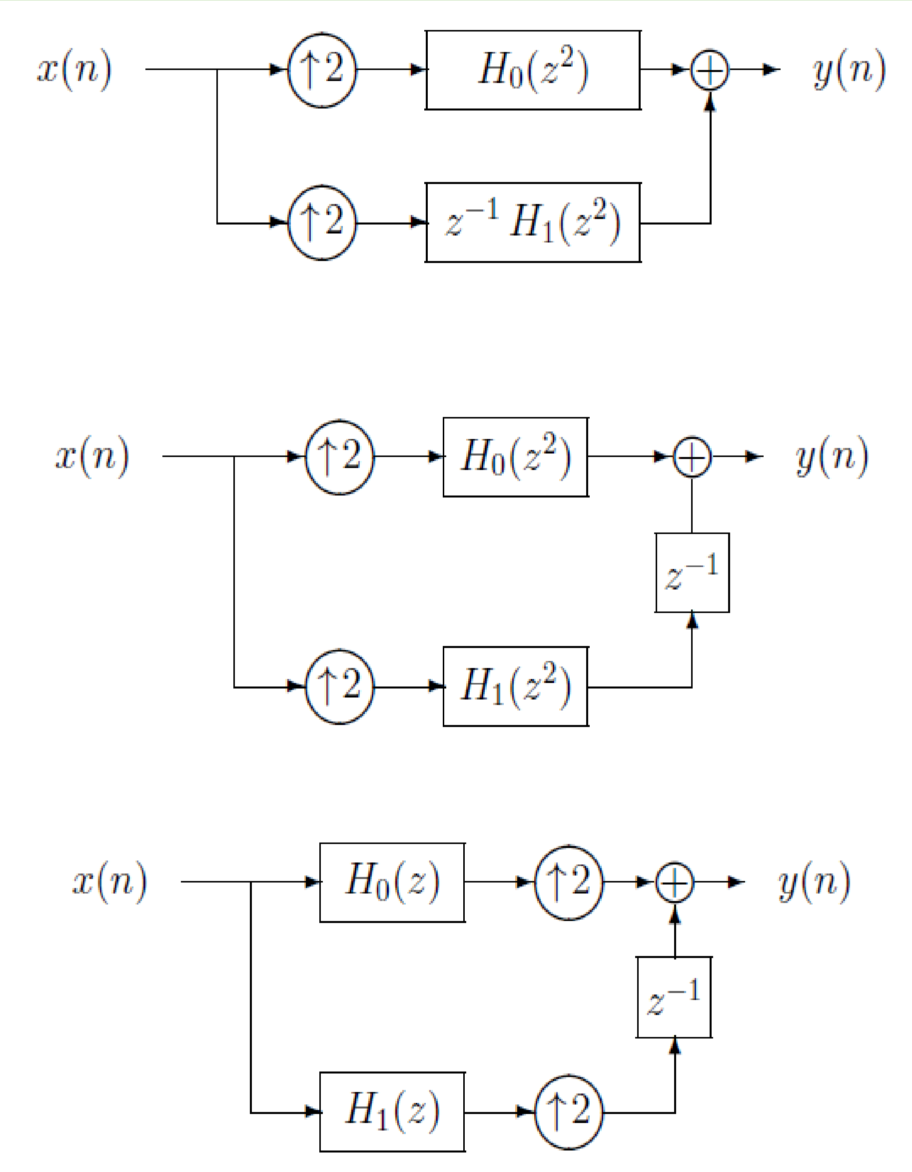
# Traitement Multicadences – Implémentation efficace

Une meilleure implémentation peut être obtenue en utilisant la décomposition polyphasée suivie par l'identité de Noble comme l'illustre le bloc-diagramme suivant:



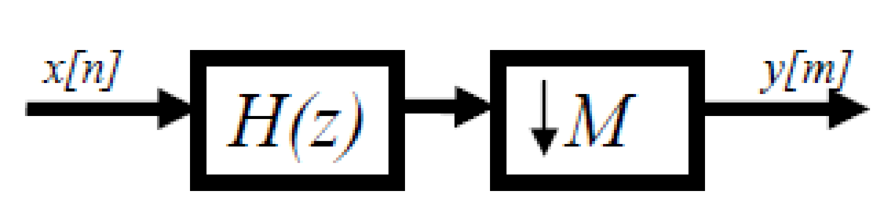



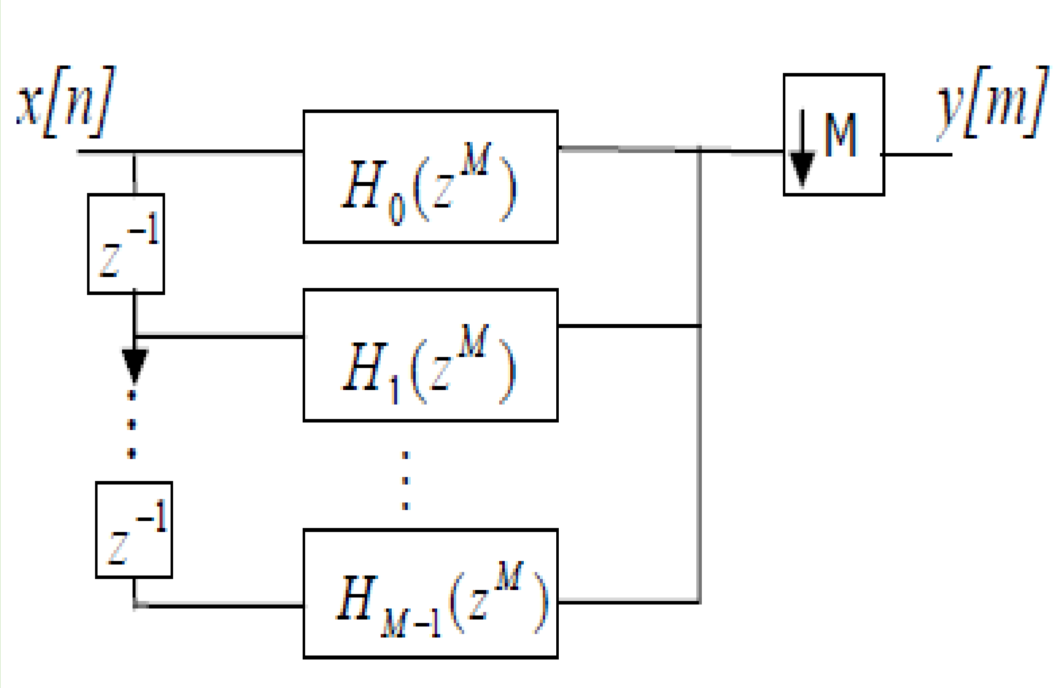

- ➔ Dans le dernier bloc, les filtres opèrent avec de faibles cadences ;
- ➔ Les entrées de ces filtres ne contiennent pas de zéros;
- ➔ $h_0(n)$, $h_1(n)$ ont chacune une longueur qui est égale à la moitié de celle du filtre original ($h(n)$);
- ➔ Le nœud ajouté dans le dernier diagramme n'entraîne aucun ajout réel d'additions.
- ➔ Il implémente un entrelacement des deux branches.

## *Traitement Multicadences –Structure polyphasée général pour la décimation*

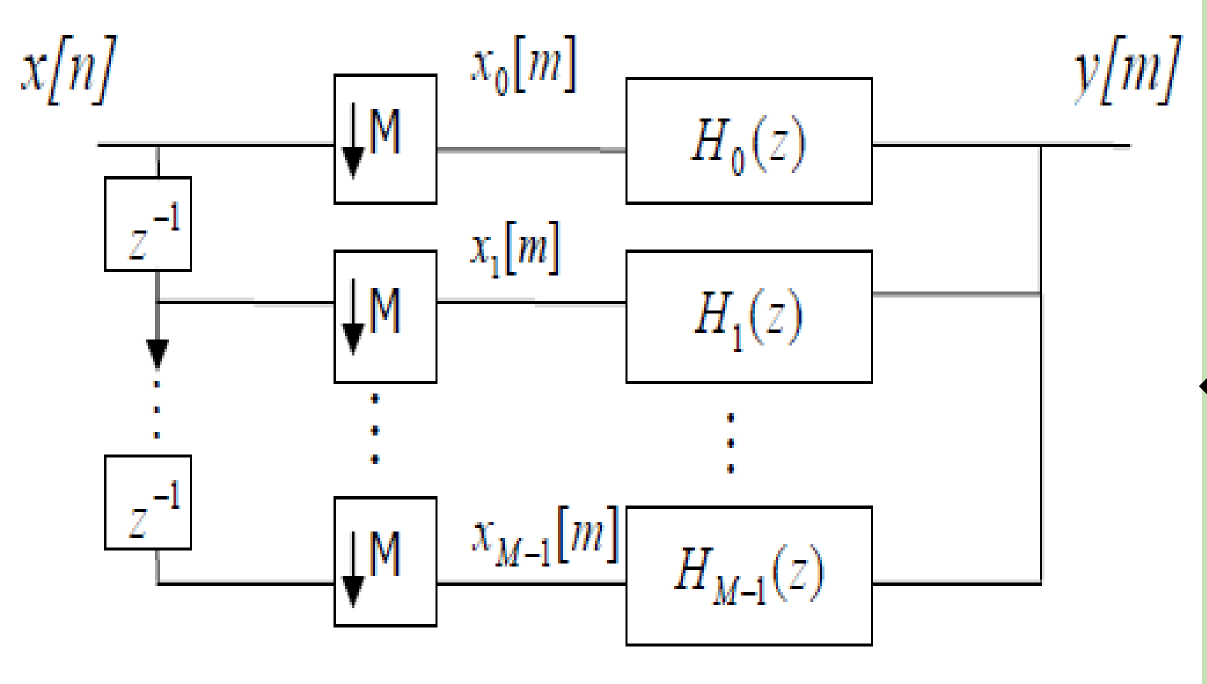



Décimateur constitué d'un filtre anti-repliement H(z) et d'un sous-échantillonneur

$$H(z) = \sum_{i=0}^{M-1} z^{-i} H_i(z^M)$$

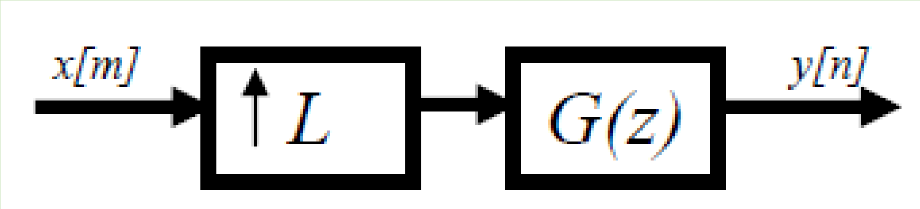



Structure des composantes polyphasées

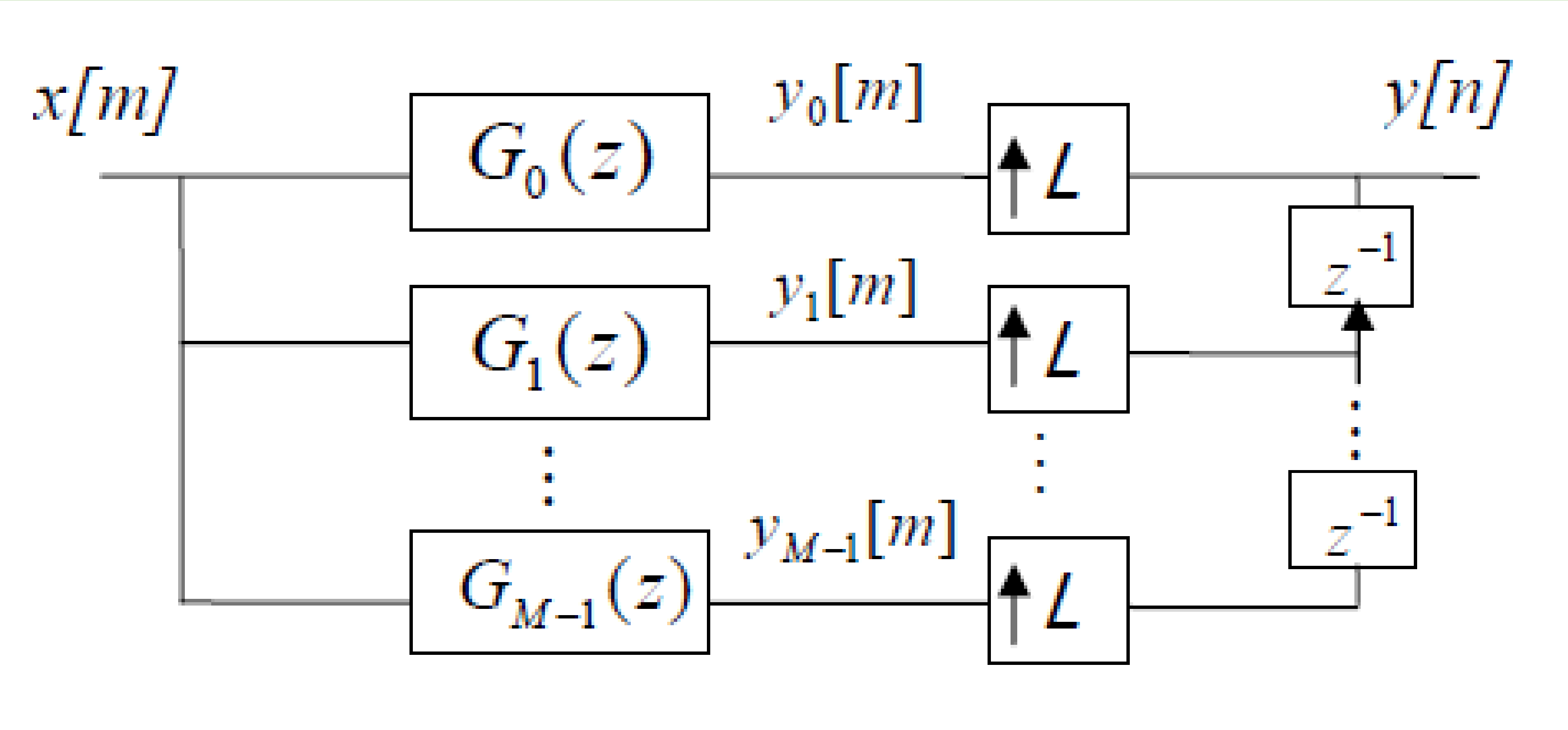



Structure polyphasée pour la décimation

# *Traitement Multicadences –Structure polyphasée général pour l'interpolation*



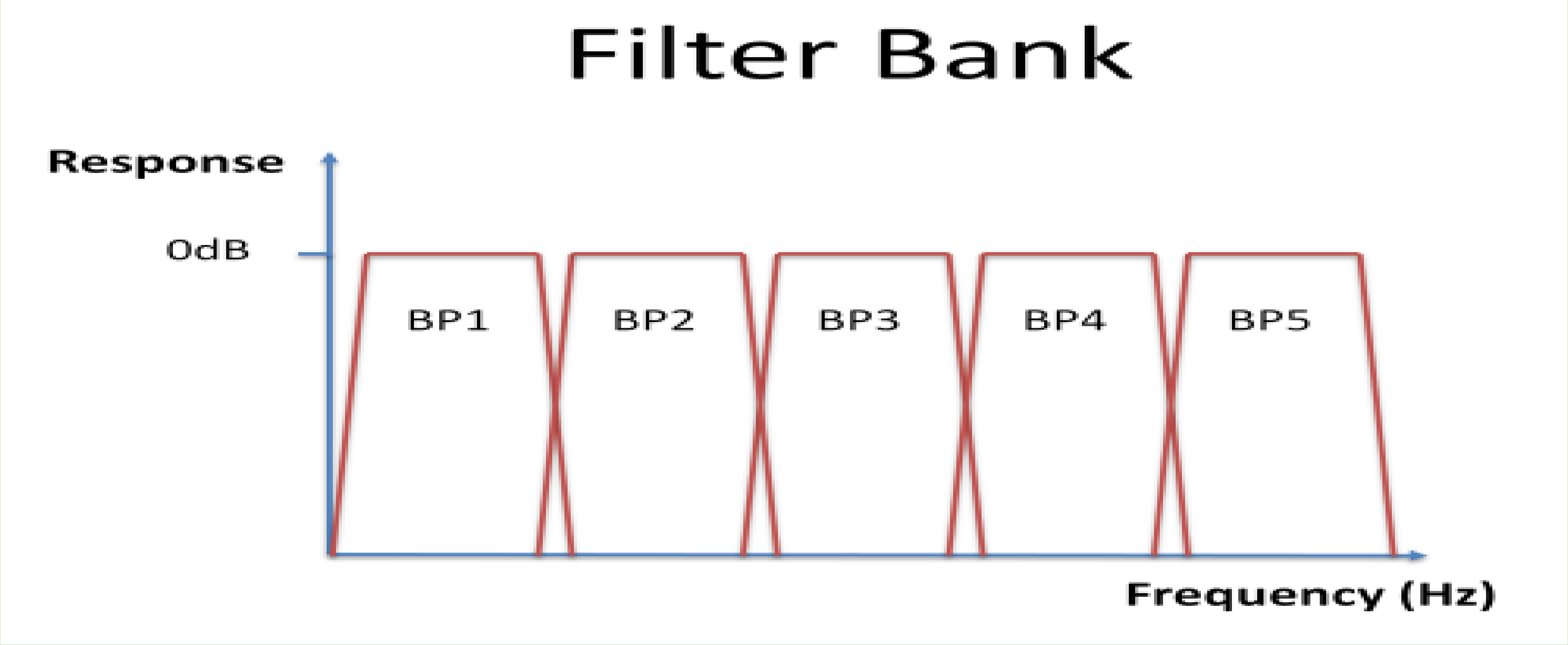

Interpolateur composé d'un sur-échantillonneur et d'un filtre anti-image




Structure polyphasée pour l'Interpolation

# *Traitement Multicadences – Banc de Filtre*

Pour de nombreuses applications de traitement du signal, il est utile de séparer un signal en différentes bandes de fréquences appelées sous-bandes. Le spectre peut être partitionné d'une manière uniforme comme l'illustre la figure suivante. La largeur de chaque sous-bande est égale à $\Delta B = \frac{2\pi}{M}$.

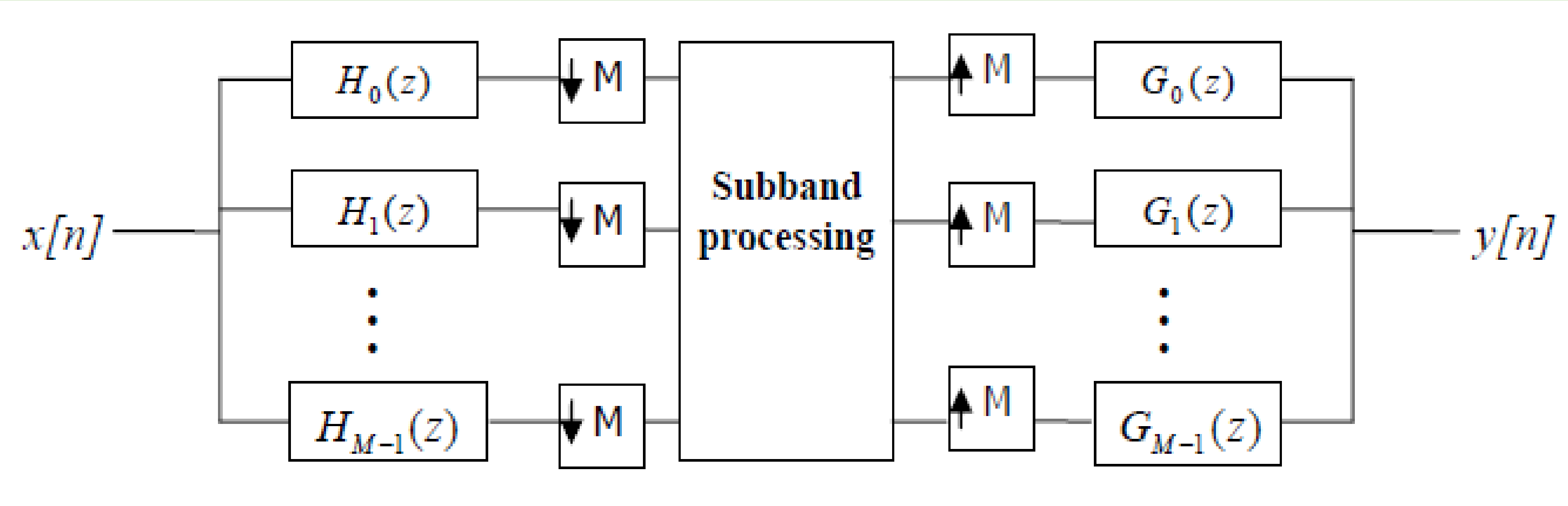



Spectre espacé uniforme

➔ Les sous-bandes peuvent également avoir un espacement non uniforme.
➔ Le but de la séparation en sous-bandes est de rendre plus pratique le traitement postérieur.
➔ Les applications les plus populaires de la décomposition en sous-bandes consiste en le codage source pour les signaux audio et vidéo dans le but d'un stockage et/ou d'une transmission efficaces.

# Traitement Multicadences – Banc de Filtres

Dans les applications typiques, le traitement du signal exceptionnel se situe entre le banc de filtres d'analyse $\{H_0(z), H_1(z), \dots, H_M(z)\}$ et le banc de filtres $\{G_0(z), G_1(z), \dots, G_M(z)\}$ de synthèse comme indiqué dans la figure suivante.




Structure standard d'un banc de filtres

- ➔ Le principal objectif dans la conception d'un banc de filtres est d'avoir une bonne reconstruction lorsque le traitement de la sous-bande est sans perte,
- ➔ Cet objectif est motivé par l'idée que le filtrage de la sous-bande ne devrait pas limiter les performances de reconstruction lorsque le traitement de la sous-bande est sans perte ou presque sans perte.
- ➔ Nous allons discuter trois types de banc de filtres polyphasés à savoir: Banc de filtres à DFT, Banc de filtres à DFT modifié (MDFT) et Banc de filtres modulé en Cosinus.

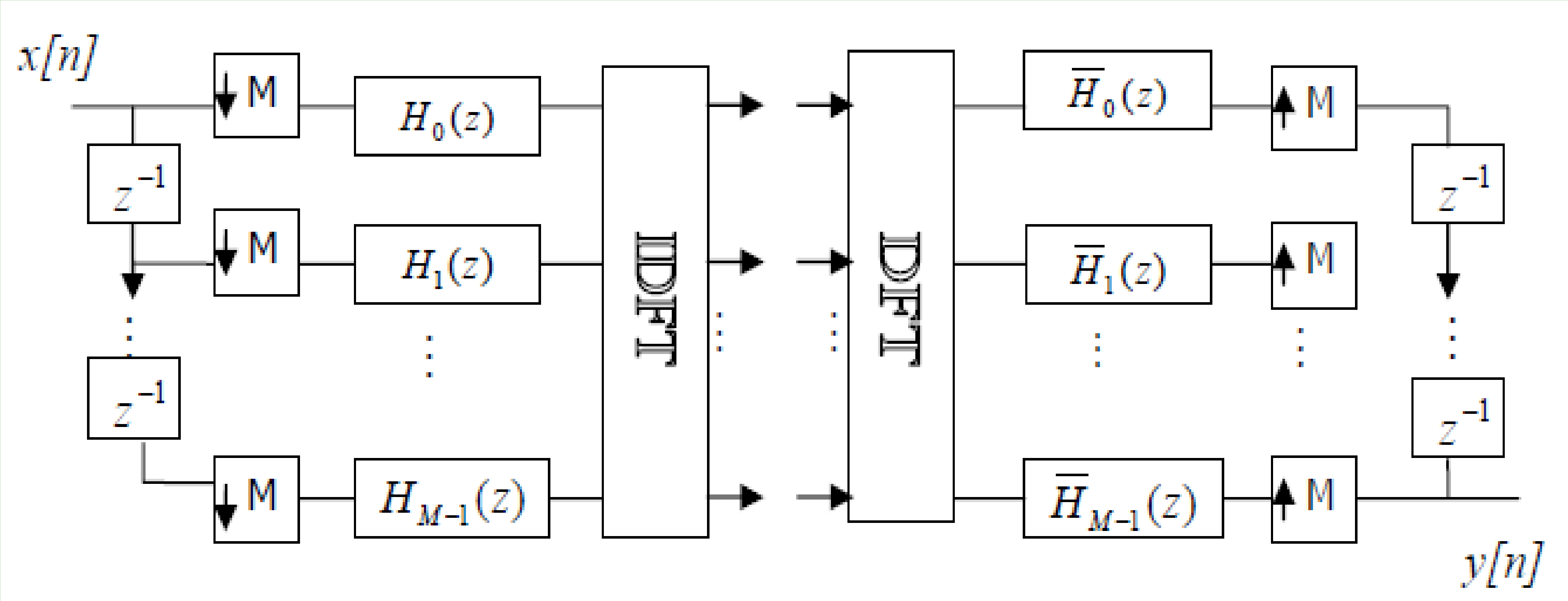
# Traitement Multicadences – Banc de Filtres à DFT

➔ Le banc de filtres à DFT est le plus facile à mettre en œuvre et il a la structure la plus simple.

➔ Le banc de filtres standard illustrée à la Figure précédente, effectue un filtrage avant le sous-échantillonnage.

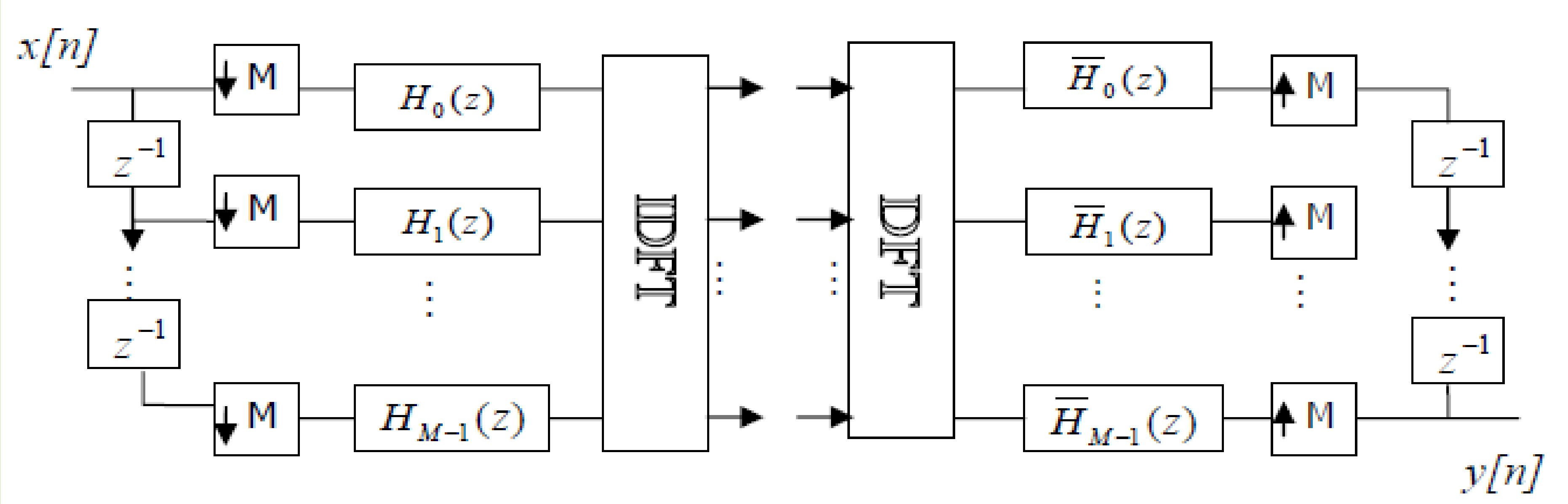
➔ Le banc de filtres à DFT effectue d'abord le sous-échantillonnage, puis le filtrage, ce qui entraîne une énorme réduction de calcul.

➔ Les propriétés qui permettent d'obtenir ce résultat sont l'utilisation des structures polyphasées et l'identité Noble.




Structure d'un band de filtres à DFT

# *Traitement Multicadences – Banc de Filtres à DFT*




Structure d'un band de filtres à DFT

➔ Le banc de filtres à DFT comprend des bancs de filtres d'analyse et de synthèse,

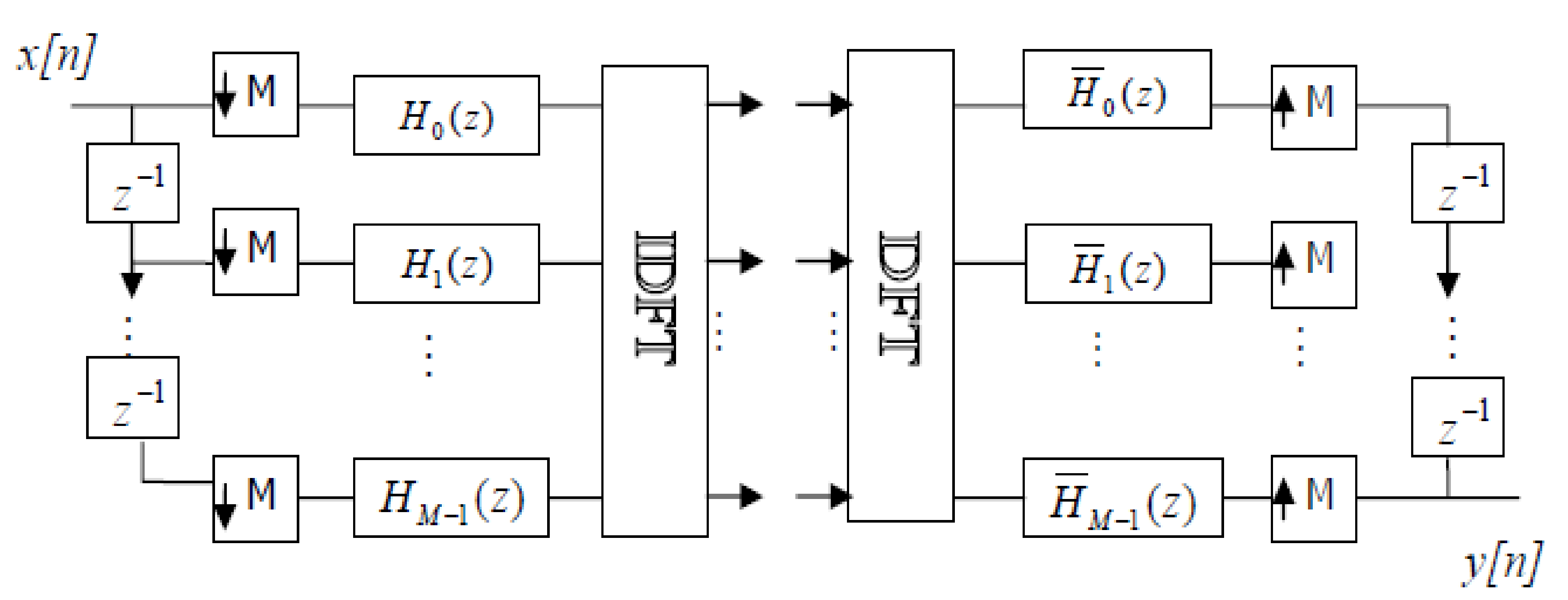
➔ Les sous-filtres de ces bancs sont générés à partir du même filtre prototype.

➔ Pour le banc d'analyse, nous devons effectuer une décimation polyphasée.

➔ En revanche, nous implémentons l'interpolation polyphasée dans le banc de synthèse.

➔ Les filtres dans le banc d'analyse $\{H_0(z), H_1(z), \dots, H_{M-1}(z)\}$ et les filtres dans le banc de synthèse $\{\bar{H}_0(z), \bar{H}_1(z), \dots, \bar{H}_{M-1}(z)\}$ sont appelés les composantes polyphasées du filtre prototype. Les réponses impulsionnelles de ces filtres sont liées par la relation suivante: $\bar{h}_k(n) = h_k(N-1-n), 0 \leq n \leq N-1$.

# Traitement Multicadences – Banc de Filtres à DFT




Structure d'un band de filtres à DFT

- ➔ Si le traitement de la sous-bande entre les opérations IDFT et DFT est sans perte, le signal de sortie y[n] est identique à x[n] avec un certain retard.
- ➔ Cependant, ceci n'est pas le cas ➔ Lorsque on décompose le filtre prototype en ses composantes polyphasées, il crée un repliement entre ces sous-filtres, ce qui nous empêche de reconstruire parfaitement le signal.
- ➔ La structure de banc de filtres DFT est très simple et ne contient aucune structure d'annulation de repliement.
- ➔ Ce banc de filtre soufre de cet effet mais il est très utile pour le découpage en canaux.