

Série de Travaux Dirigés n° 6

(Variables aléatoires)

Exercice n°1 :

On jette une pièce de monnaie 3 fois. Soit X le nombre de piles obtenus.

- a) Déterminer l'Univers Ω de cette expérience aléatoire.
- b) Déterminer la loi de probabilité de X , son espérance $E(X)$ et sa variance $V(X)$.
- c) Calculer $P(X < 2)$ et $P(X \geq 2)$ et $P(1 < X < 2.5)$.
- d) Soit $Y = 3X + 1$. En déduire son espérance $E(Y)$ et sa variance $V(Y)$.

Exercice n°2 :

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par :

X	4	5	6	7	8
P	0.15	0.35	0.10	0.25	0.15

- a) Déterminer et représenter la fonction de répartition de X .
- b) Calculer les probabilités suivantes : $P(X \leq 7.5)$; $P(X > 8)$; $P(4 \leq X \leq 6.5)$; $P(5 < X \leq 6)$.
- c) Déterminer l'espérance et la variance de X .
- d) Soit $Z = \frac{1}{X}$. Déterminer la loi de Z , et son espérance $E(Z)$ et variance et sa variance $V(Z)$.

***Exercice n°3 :**

Une urne contient sept boules : une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule, si la boule est rouge, il gagne 10 points, si elle est jaune, il perd 5 points, si elle est verte, il tire sans remise une deuxième boule de l'urne, si cette deuxième boule est rouge, il gagne 8 points, sinon il perd 4 points.

Soit X la v.a. associant à chaque tirage le gain algébrique du joueur.

- 1) Construire un arbre pondéré représentant l'ensemble des éventualités de ce jeu.
- 2) Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X .
- 3) Calculer l'espérance et la variance de la v.a. X .

Exercice n°4 :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire X .
- 2) Déterminer la fonction de répartition de X et la tracer.
- 3) Calculer l'espérance de X .

Exercice n°5 :

On considère une variable aléatoire X de densité : $f(t) = \frac{c}{1+t^2}$

- a) Pour quelle(s) valeur(s) de c la fonction f est-elle bien une densité?
- b) Calculer la fonction de répartition de X .
- c) Déterminer $P(X < 0)$ et $P(1 < X < 1)$:

N.B : rappelle que $\arctan 0 = 0$, $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ et $\arctan(-x) = -\arctan x$.