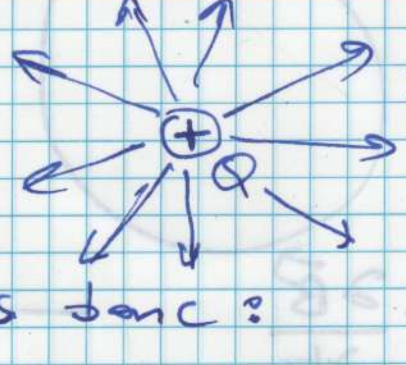
1) Potentiels vecteur et Potentiel Scalaire

Les potentiels vecteur et scalaire sont des fonctions mathématiques auxiliaires utilisées pour faciliter le calcul des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$.
Ces deux potentiels, notés respectivement $\vec{A}$ et V, n'ont pas de réalité physique.
Ce sont $\vec{E}$ et $\vec{H}$ qui sont physiquement mesurables.

Rappel des Equations de Maxwell

Tous les phénomènes E.M peuvent être résumés en 4 " simples equations ". Ces dernières sont données comme suit:

1) Notion du champ électrique généré par une charge. ⇒ le flux électrique sortant d'une surface est proportionnel à la charge électrique qui s'y trouve.



$\vec{E}$ Divergence

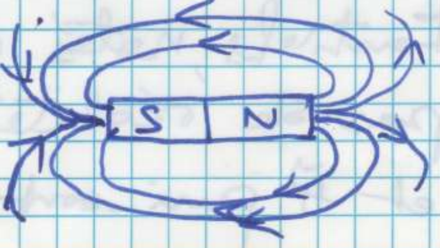
Nous avons donc :

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 4\pi\rho \quad \text{——— (a)}$$

$\vec{\nabla}$: Opérateur Nabla $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

ρ : Densité Volumique de la charge électrique.

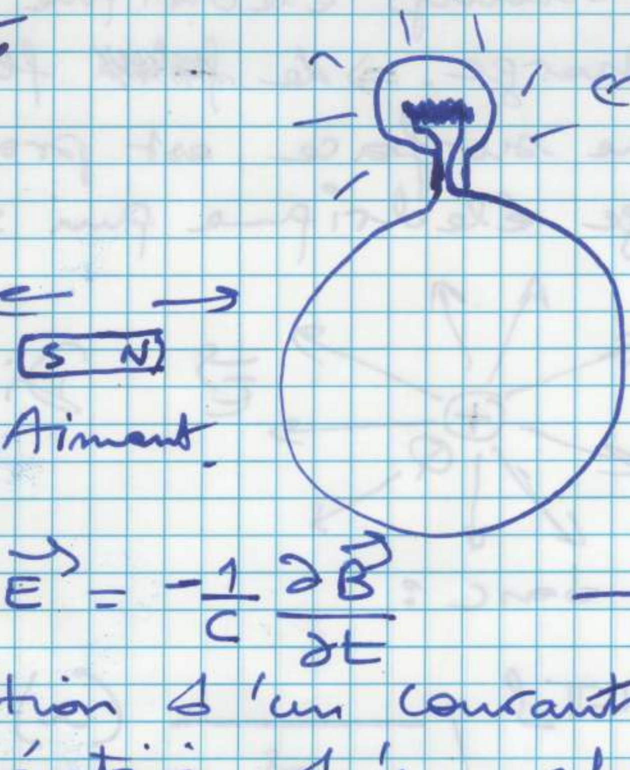
2) Notion du champ magnétique généré par un aimant ⟹ Le flux magnétique à travers une surface vaut toujours 0. ⟹ Les lignes de champ d'un aimant reviennent toujours sur elles même.



Divergence.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \text{——— (b)}$$

3) Notion d'induction EM connue aussi comme la loi de Faraday. Elle dit que si on fait varier le flux magnétique ($\Delta\phi$) dans un circuit, un courant I est induit.

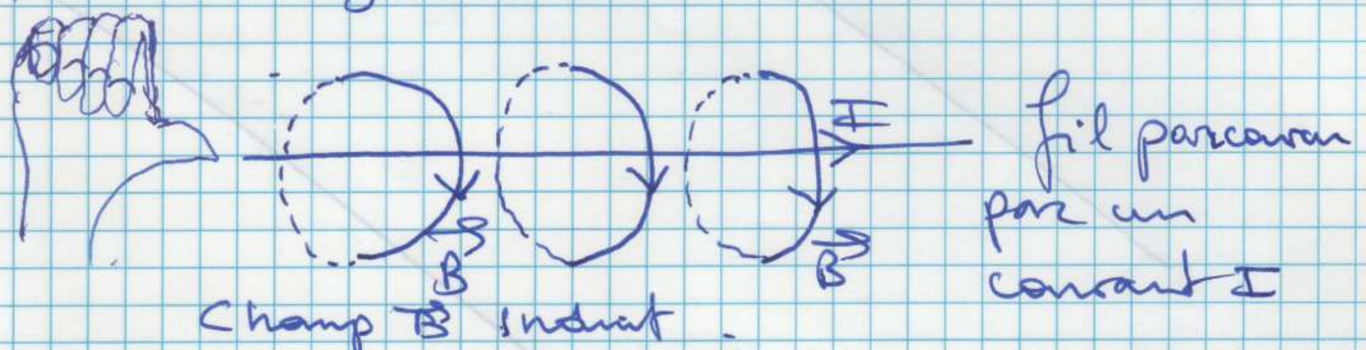


$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{——— (c)}$$

4) Notion d'un courant qui provoque la création d'un champ magnétique

⟹ Un fil parcouru Par un courant va générer un champ magnétique →

3) → autour de lui et qui est perpendiculaire au courant et dont le sens est déterminé par la règle de la main droite.



$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c}\left[4\pi \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right] \text{ —— (d)}$$

$\vec{J}$: courant de déplacement (Vecteur Densité de courant)

potentiel vecteur $\vec{A}$ pour une source de courant électrique $\vec{J}$.

Le flux magnétique $\vec{B}$ est toujours solénoïdal $\Longrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$.

$\vec{B}$ peut être représenté par le rotationnel d'un autre vecteur $\vec{A}$ comme suit :

$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$.   ($\vec{B}$: induction magnétique)

Nous avons :

$$\vec{B}_A = \mu . \vec{H}_A = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \text{ —— (e)} \Longrightarrow$$

$$\vec{H}_A = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \text{ —— (f)}$$

L'indice A indique que le champ $(\vec{B}, \vec{H})$ dérive d'un potentiel vecteur $\vec{A}$

Solénoïdal ⇒ champ vectoriel dont la Div est nulle.

4) (Variation sinusoïdale de ces paramètres)
En régime harmonique, les équations de Maxwell deviennent :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon \quad \text{—— (g)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad \text{—— (h)}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad \text{—— (i)}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E} + \vec{J} \quad \text{—— (j)}$$

Substituant l'équation (f) dans (i) on arrive à :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_A = -j\omega\mu\vec{H}_A = -j\omega\vec{\nabla}\wedge\vec{A} \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \wedge \left[\vec{E}_A + j\omega\vec{A}\right] = 0 \quad \text{—— (k)}$$

L'expression entre deux crochets représente un champ électrique puisque son "Rot" est nul $\Rightarrow$ c'est un champ conservatif qui se comporte comme un champ électrique statique.

Nous avons aussi, l'identité vectorielle montre que :

$$\vec{\nabla} \wedge \left(-\vec{\nabla} \cdot \phi_e\right) = 0 \quad \text{—— (l)}$$

$\Rightarrow$ de (k) et (l), nous avons :

$$\vec{E}_A + j\omega\vec{A} = -\vec{\nabla}\cdot\phi_e \Rightarrow \vec{E}_A = -j\omega\vec{A} - \vec{\nabla}\cdot\phi_e$$

$$\boxed{\vec{E}_A = -j\omega\vec{A} - \vec{\nabla}\cdot\phi_e} \quad \text{—— (m)}$$

A partir des équations de $\vec{E}$ et $\vec{H}$, il →

5) Il est clair que si on connait $\vec{A}$ et ϕ_e, on peut connaître $\vec{E}$ et $\vec{H}$.

Notons que ϕ_e représente un potentiel scalaire électrique.

En prenant le "ROT" des deux côtés de l'équation (f) et en utilisant l'identité vectorielle suivante :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}.\vec{A}) - \nabla^2 .\vec{A},$$

On trouve :

$$\vec{\nabla} \wedge (\mu \vec{H}_A) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\Rightarrow \quad \mu \vec{\nabla} \wedge \vec{H}_A = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad \text{—— (n)}$$

En remplaçant (n) dans (d), on arrive à :

$$\mu \vec{J} + j\omega\mu\varepsilon \vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad \text{—— (o)}$$

En remplaçant l'équation (m) dans (o). on arrive à :

$$\nabla^2 \vec{A} + \omega^2 \mu\varepsilon \vec{A} = -\mu \vec{J} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A}) + \vec{\nabla}(j\omega\mu\varepsilon \phi_e)$$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A} + j\omega\mu\varepsilon\phi_e) \quad \text{—— (P)}$$

Où : $k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon = \beta^2$ ($k = \beta$: vecteur d'onde)

Si on prend :

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = -j\omega\mu\varepsilon \phi_e \quad \text{—— (Q)}$$

appelée Jauge de Lorentz, on arrive à (en remplaçant (Q) dans (P)) :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad \text{—— (R)}$$

c'est l'équation d'onde vectorielle. (Equation différentielle).

6) De plus, l'équation (m) se réduit à :

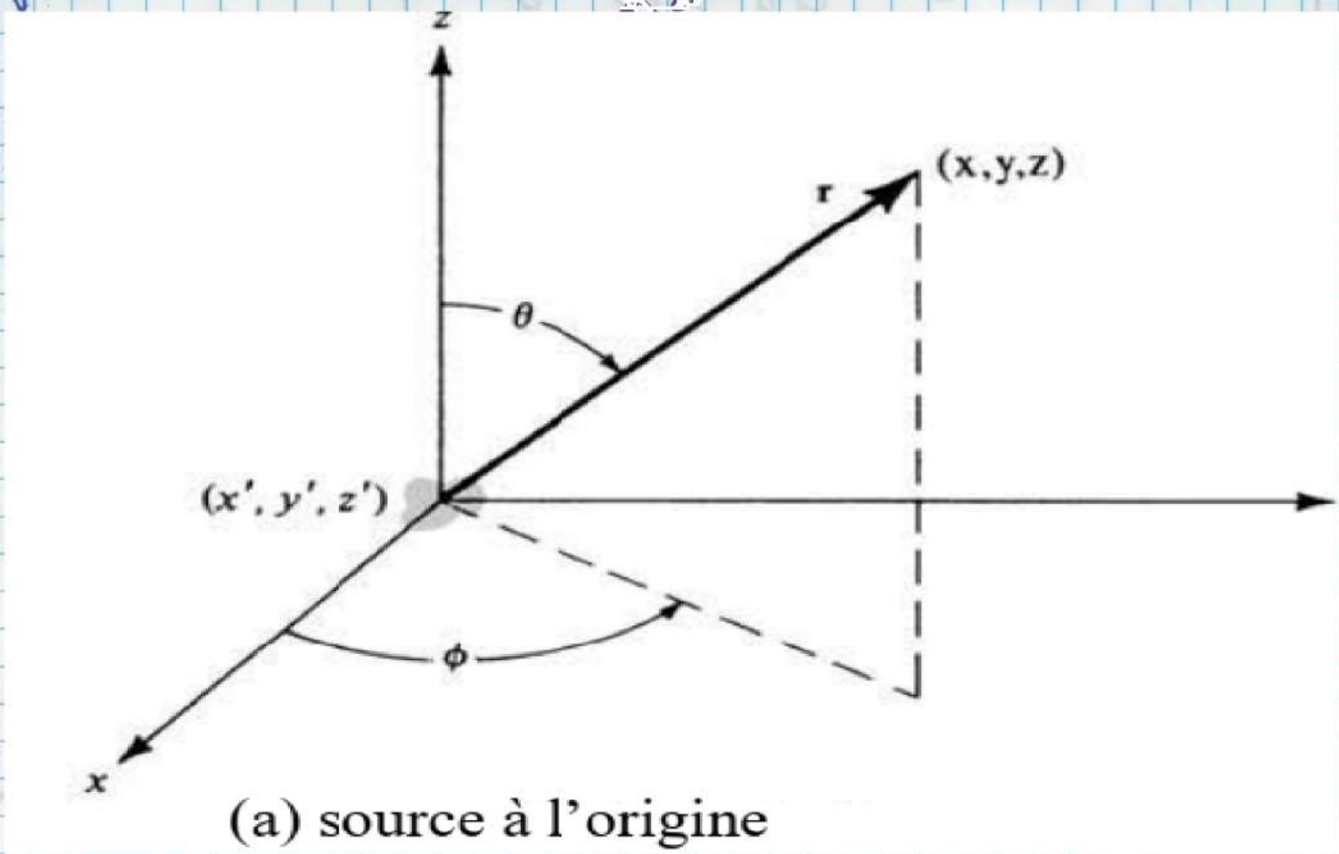
$$\vec{E}_A = -j\omega\vec{A} - j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) \quad \text{— (S)}$$

Donc, si on connait $\vec{A}$, on peut déterminer $\vec{H}_A$ et $\vec{E}_A$ en utilisant les deux équations

$$\begin{cases} \vec{H}_A = \dfrac{1}{\mu}\vec{\nabla}\wedge\vec{A} \\ \vec{E}_A = -j\omega\vec{A} - j\dfrac{1}{\omega\mu\varepsilon}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) \end{cases} \quad \text{— (T)}$$

Solution de l'équation d'onde de $\vec{A}$.

Pour déterminer la solution de l'équation d'onde : $\nabla^2\vec{A} + k^2\vec{A} = \mu\vec{J}$ on suppose que 1 source infinitésimale est placée à l'origine d'1 système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) comme le montre la figure suivante :



(a) source à l'origine

7) Si la densité de courant est dirigée le long de z $\Rightarrow$ Seulement A_z existe $\Rightarrow$ $A_x = 0$ et $A_y = 0$. On peut écrire alors :

$$\nabla^2 A_z + k^2 A_z = -\mu J_z$$

La solution de cette équation est donnée par (Voir Exercice de TD) :

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V J_z \frac{e^{-jkr}}{r} \, dV'$$

Si la densité de courant est dirigée le long de x $\Rightarrow$ seulement A_x existe $\Rightarrow$ $A_y = A_z = 0$. On peut écrire alors :

$\nabla^2 A_x + k^2 A_x = -\mu J_x$ $\Rightarrow$ La solution est donnée par : $A_x = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V J_x \frac{e^{-jkr}}{r} \, dV'$

r : est la distance d'un point quelconque et la source.

point d'observation

$\longrightarrow$

8) De la même manière, Ay est donnée par:

$$A_y = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V J_y \frac{e^{jkr}}{r} dv'$$

D'après ces résultats (A_x, A_y, A_z), on peut écrire la solution de l'équation d'onde comme suit:

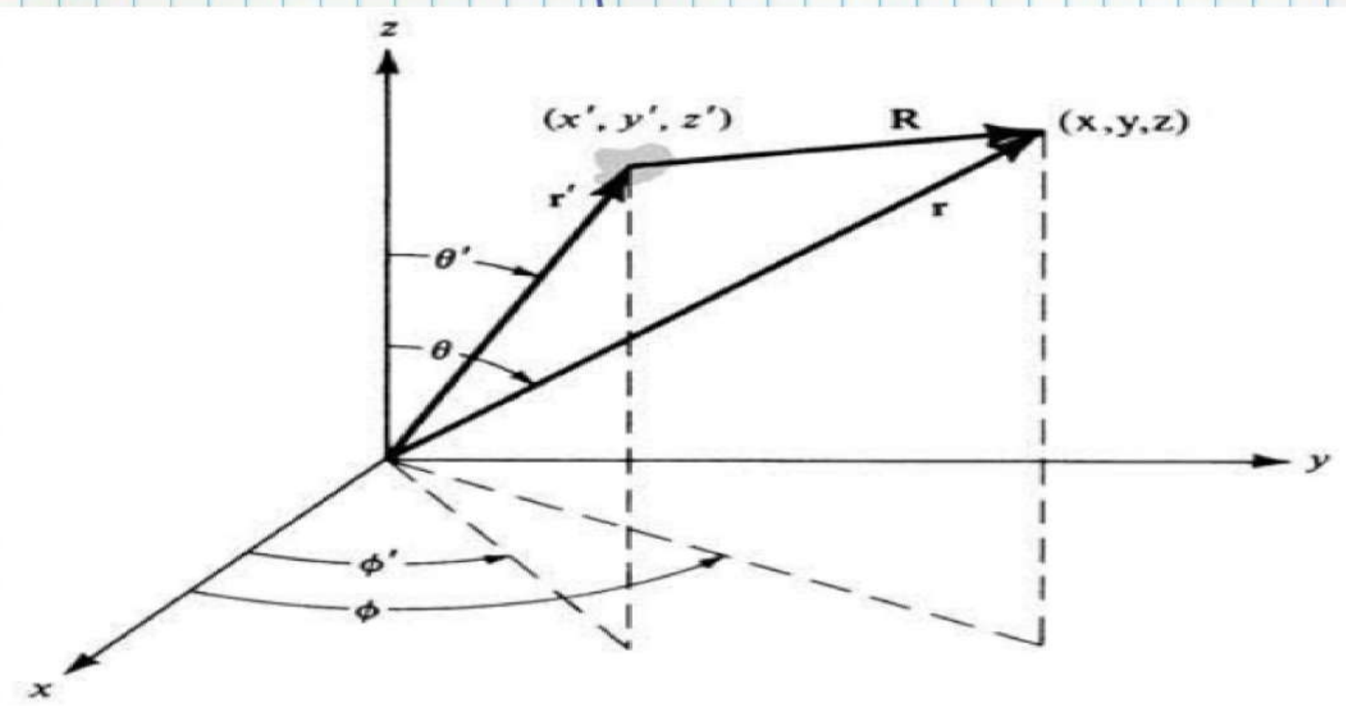
$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \vec{J} \frac{e^{-jkr}}{r} dv'$$

Si la source est placée dans un point de coordonnées (x', y', z'), la solution est formulée comme suit.

$$A(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \vec{J}(x', y', z') \frac{e^{-jkR}}{R} dv'$$

(x, y, z) représentent les coordonnées du point d'observation.

R la distance d'un point de la source et le point d'observation.



(b) source en dehors de l'origine

9) Dipôle élémentaire (Doublet)

Un doublet électrique est un fil rectiligne dont la longueur h est inférieure à la longueur d'onde.
Ce fil est parcouru par un courant constant.
C'est une antenne élémentaire parfois prise comme source de référence, mais le plus souvent utilisée pour calculer le champ rayonné par des antennes filaires, considérées comme une succession d'éléments dont chacun constitue un doublet.

Champ rayonné

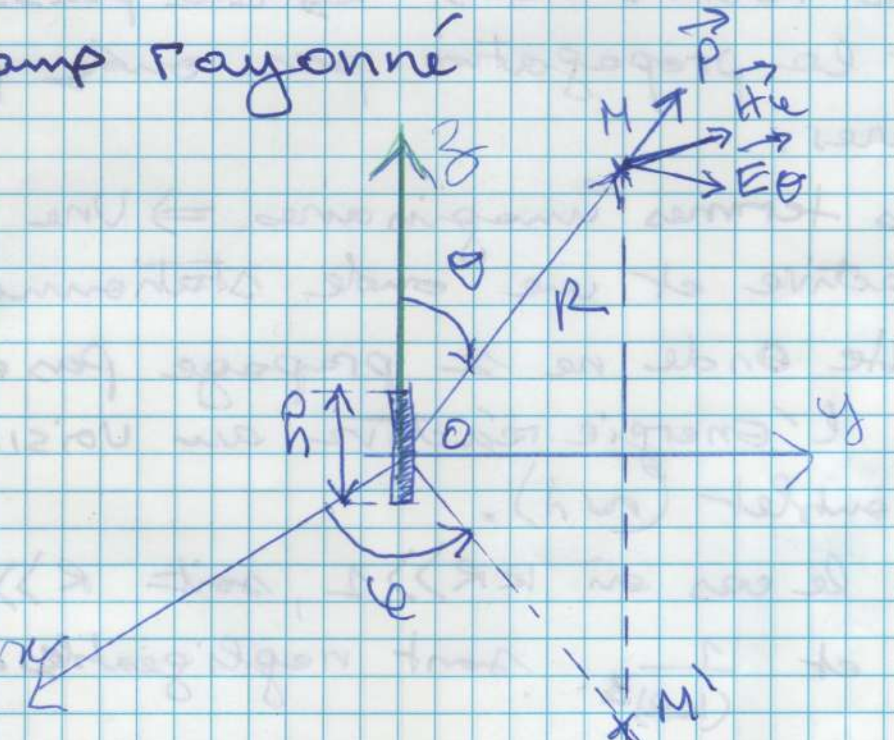


Figure 1. composantes des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ rayonnés par un Doublet

10) Les formules générales du champ Electro-magnétique (composantes des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$) sont données comme suit :

$$\underline{E}_R = j\,60\,k^2\,\underline{I}\,h\cos\theta\left[-\frac{j}{(kR)^2}-\frac{1}{(kR)^3}\right]e^{-jkR} \quad (1)$$

$$\underline{E}_\theta = j\,30\,k^2\,\underline{I}\,h\sin\theta\left[\frac{1}{kR}-\frac{j}{(kR)^2}-\frac{1}{(kR)^3}\right]e^{-jkR} \quad (2)$$

$$\underline{H}_\varphi = j\,\frac{k^2}{4\pi}\,\underline{I}\,h\sin\theta\left[\frac{1}{kR}-\frac{j}{(kR)^2}\right]e^{-jkR} \quad (3)$$

$$E_\varphi = H_R = H_\theta = 0.$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Le calcul des composantes du vecteur de Poynting fait donc apparaître :

- Des termes réels $\Rightarrow$ Une puissance active et la propagation par ondes progressives. pures.
- Des termes imaginaires $\Rightarrow$ Une puissance réactive et une onde stationnaire pure. Cette onde ne se propage pas et emmagasine de l'Energie réactive au voisinage du doublet ($\sim\lambda$).

Dans le cas où $kR \gg 1$, soit $R \gg \lambda/2\pi$ (En pratique $R > 5\lambda$)

$\frac{1}{(kR)^2}$ et $\frac{1}{(kR)^3}$ sont negligeables $\Rightarrow$

$\underline{E}_R \simeq 0$ et $\underline{E}_\theta$ est donné par :

$$\underline{E}_\theta = j\,\frac{60\pi}{\lambda R}\,h\,\underline{I}\sin\theta\exp\left[-j\frac{2\pi R}{\lambda}\right] \quad (4)$$

11) $\underline{H}_\varphi$ est donné par :

$$\underline{H}_\varphi = j \frac{1}{2\lambda R} h \underline{I} \sin\theta \exp\left[-j\frac{2\pi R}{\lambda}\right] \quad \text{——} \quad (5)$$

D'après les deux équations (4) et (5), on remarque ce qui suit :

- $\vec{E}$ et $\vec{H}$ sont perpendiculaires l'un par rapport à l'autre, $\vec{E} \perp \vec{H}$;
- $\vec{E}$ et $\vec{H}$ sont en phase ;
- $|\vec{E}| / |\vec{H}| = 120\pi$ (l'impédance d'onde, en Ohm)

$\Rightarrow$ des propriétés caractéristiques d'une onde sphérique se propageant en espace libre.

Diagramme de rayonnement du Doublet

Les équations (4) et (5) montrent que pour $R >> \lambda/2\pi$, le champ électromagnétique $(\underline{E}_\theta, \underline{H}_\varphi)$ varie en fonction de $\sin\theta$. $\Rightarrow$

Le DR en champ est fonction de $\sin\theta$;

$$F.CR(\theta) = \sin^2\theta. \quad \text{——} \quad (6)$$

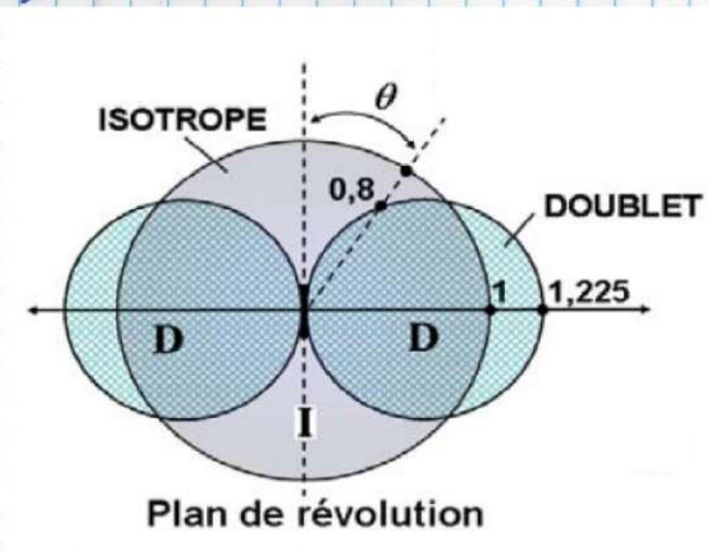


Figure 2 - DR en champ du Doublet

12) Dans un plan contenant le doublet, le DR en champ est constitué par l'ensemble de deux cercles tangents en O (point O) au centre du Doublet.
Dans tout l'espace, le DR est obtenu en faisant tourner le DR de la figure ② autour d'un axe passant par le Doublet comme le montre la figure ③

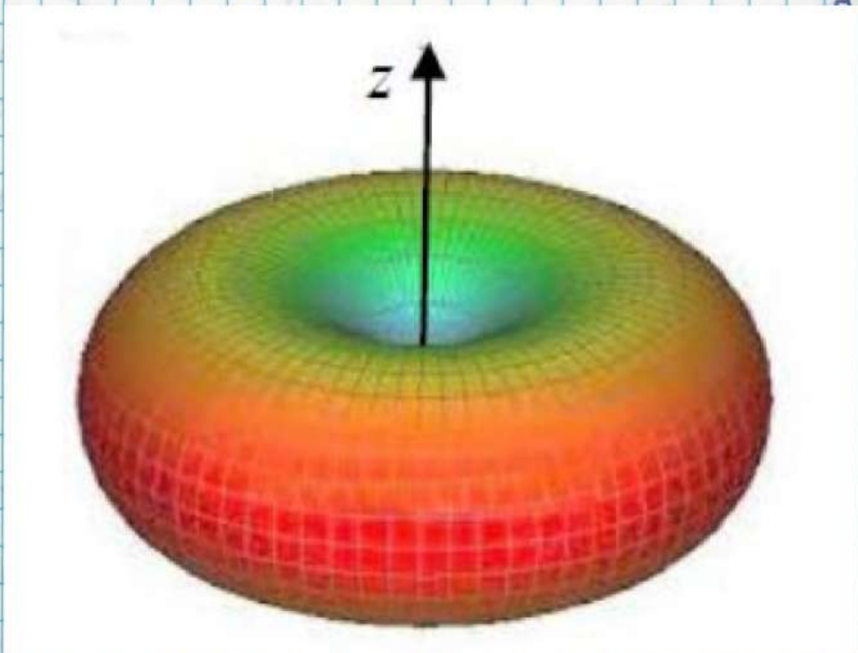


Figure ③ DR dans tout l'espace du Doublet.
Comme le montre cette figure, le volume engendré est un tore de révolution.
Le gain du Doublet est donné par :

$$G = \frac{2\pi}{\int_0^{\pi} FCR(\theta) \sin\theta \, d\theta} = 1,5 \quad \text{—— ⑦}$$

$$G_{dB} = 1,76 \text{ dB}.$$

La résistance de rayonnement du doublet est :

$$R_r = 80 \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \Omega \quad \text{—— ⑧}$$