Exercice N°1

Un volume de 3 m^3 de CO_2 à 10 °C et 1,03 bar est comprimé de façon isotherme jusqu'à un volume de 0, 6 m^3.

1. Quelle est la pression résultante ?
2. Quelles seraient la pression et la température si le processus avait été isentropique ? L'exposant adiabatique g pour le CO_2 est de 1,28.

Réponse

1. Cas isotherme : $x = 1 \Rightarrow Pv = cte\ avec\ v = \frac{1}{\rho}$. Soit m la masse du CO_2. On peut donc écrire : $1{,}03\frac{3}{m}p_2\frac{0{,}6}{m} \Rightarrow p_2 = 5{,}15\ bar$
2. Cas isentropique : $x = y = 1{,}28\ et\ (p\ v)^{\gamma} = C^{st} \Rightarrow p_2 = 8{,}08\ bar$

De plus $T_2 = T_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Rightarrow T_2 = (10+273)\left(\frac{5{,}15}{1{,}03}\right)^{\frac{1{,}28-1}{1{,}28}} \Rightarrow T_2 = 402{,}4K$

Exercice N°2

Un disque de rayon r_0 tourne à une vitesse w dans un bain d'huile de viscosité μcomme illustré sur la figure ci-dessous. En supposant un profil de vitesse linéaire et en négligeant le cisaillement sur les bouts du disque, déterminer l'expression du couple visqueux C sur le disque.

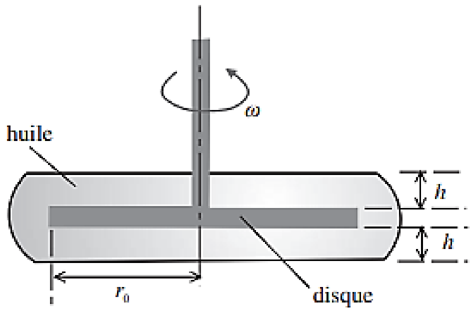


Fig. 1.1 – Schéma de l'installation d'un disque tournant dans un bain d'huile.

Réponse

$\tau = \mu\frac{du}{dy} = \mu\frac{r.w}{h}$ sur les deux cotés .

Or : $dC = 2(r\ \tau\ dA) = 2\left\{r\ \mu\ \frac{r\ w}{h}\ 2\pi\ r\ dr\right\} = 4\frac{\mu\ w\ \pi}{h}\ (r^3\ dr)$

D'où : $C = 4\frac{\mu\, w\, \pi}{h}\int_0^{r_0}(r^3\, dr) = 4\frac{\mu\, w\, \pi}{h}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{r_0} \quad = \frac{\mu\, w\, \pi\, r_0^4}{h}$

Exercice N°3

Sur la figure ci-dessous, estimer la dépression h pour le mercure dans le tube de glace capillaire. L'angle θ représenté sur cette figure vaut 40°.

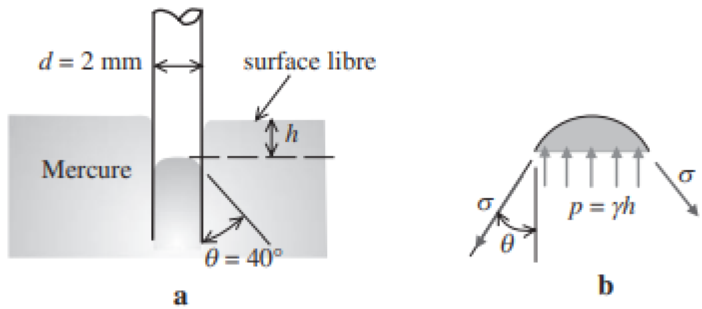


Fig. 1.2 – Tube de glace capillaire dans du mercure.

Réponse

On considère le ménisque du mercure comme un élément solide de poids négligeable. Lorsqu'on ajoute toutes les forces dans la direction verticale, on obtient :

$$-\sigma(\pi d)\cos\theta + p\left(\frac{\pi d^2}{4}\right) = 0$$

Et donc $-0{,}514(\pi.\,0{,}002)(cos40°) + 13600.9{,}81.\,h.\left(\pi.\frac{0{,}002^2}{4}\right) = 0$

Par conséquent : $h = 5{,}91mm$

Exercice N°4

Un dirigeable ayant un volume de V = 90 000 m^3 contient de l'hélium dans les conditions atmosphériques standards (pression de 101 kPa, température de 15 °C). Déterminer la masse volumique et le poids total de l'hélium.

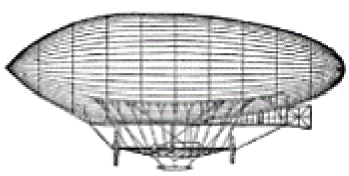


Fig.1.3 – Représentation du dirigeable.

Réponse

À partir de l'équation d'état d'un gaz idéal, on a : $r = \frac{R}{M}$ où R est la constante des gaz parfaits (R = 8,32 J /mol K) et M est la masse molaire de l'hélium (M = 4,003 g/ mol) et donc r =2077 J/ kg K. La masse volumique peut alors être calculée :

$$\rho = \frac{P}{rT} = \frac{101.10^3}{2077\,.\,(15+273)} = 0{,}169\ kg/m^3$$

Ainsi que le poids : $P = \rho.g.V = 0{,}169.9{,}81.9.10^4 = 1{,}49.10^5 N$

Exercice N°5

Un fluide newtonien ayant une densité de $d =$ 0,92 et une viscosité cinématique ν =4 10^{-4} m^2/s s'écoule sur plaque plane en régime permanent. Le profil de vitesse près de la surface est montré sur la figure ci-dessous et suit la loi *u* (*y*)/ *U = sin (π y/2δ)*.

Déterminer l'amplitude et la direction de la contrainte de cisaillement développée sur la plaque en fonction de *U* et *δ*.

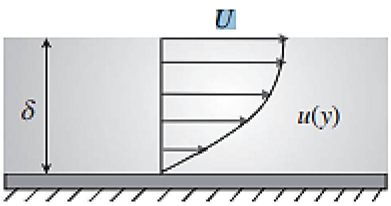


Fig. 1.4 – Représentation de l'écoulement sur une plaque.

Réponse

On a $\tau_{surface} = \mu\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0}$ où $\mu = \nu.\rho$

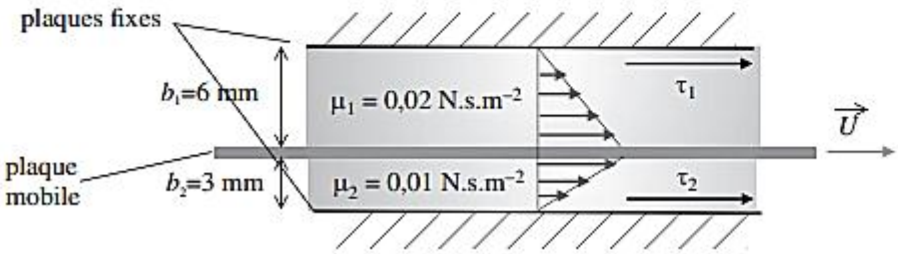
Or $\frac{du}{dy} = \frac{\pi}{2}\frac{U}{\delta}\cos(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta})$ et $y = 0$, on a $\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0} = \frac{\pi}{2}\frac{U}{\delta}$

Comme $\rho = d.\rho_{H_2O} = 0{,}92.1000 = 920\ kg/m^3$

D'où $\tau_{surface} = \rho.\nu.\frac{\pi}{2}\frac{U}{\delta} = 920.4.10^{-4}.\frac{\pi}{2}.\frac{U}{\delta} = 0{,}578\ \frac{U}{\delta}\ N/m^2$

Exercice N°6

Une grande plaque mobile se trouve entre deux grandes plaques fixes comme illustré sur la figure ci-dessus. Deux fluides newtoniens ayant des viscosités indiquées sur la figure se trouvent de part et d'autre de la plaque mobile, le profil de vitesse étant linéaire. Déterminer l'amplitude et la direction des contraintes de cisaillement qui agissent sur les murs fixes lorsque la plaque mobile se déplace à une vitesse de$U$ = 4 m·s^{-1}. On supposera que la distribution des vitesses entre les parois de part et d'autre de la plaque mobile est linéaire



Réponse

On a $\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{U}{b}$

Par conséquent : $\tau_1 = \mu_1 \frac{U}{b_1} = 0{,}02. \frac{4}{6.10^{-3}} = 13{,}3\ N/m^2$

Et $\tau_2 = \mu_2 \frac{U}{b_2} = 0{,}01. \frac{4}{3.10^{-3}} = 13{,}3\ N/m^2$

Les deux contraintes visqueuses sont égales sur les parois fixes.

Exercice N°7

Dans un appareillage piston-cylindre, le volume initial d'air est de 90 litres à une pression de 130 kPa et une température de 26 °C. Si la pression est doublée alors que le volume décroît jusqu'à 56 litres, calculer la température finale et la masse volumique de l'air

Réponse

$$\rho_1 = \frac{P_1}{rT_1} = \frac{130.\,10^3}{287.\,(26+273)} = 1{,}515 kg/m^3$$

Par conséquent, la masse de l'air correspondante est :

$$m = 1{,}515.0.09 = 0{,}1364\ kg$$

Donc : $\rho_2 = \frac{P_2}{rT_2} \Longrightarrow \frac{0{,}1364}{0{,}056} = \frac{2.(130.10^3)}{287.T_2}$

D'où : $T_2 = 372K\ et\ \rho_2 = \frac{0{,}1364}{0{,}056} = 2{,}44\ kg/m^3$

Exercice N°9

Donner l'expression de la relation de conservation de l'énergie interne sous forme enthalpique.

Réponse

En remplaçant l'enthalpie massique par son expression en fonction de l'énergie massique et de la pression :

$$h = e + \frac{p}{\rho}$$

Et donc $\frac{dh}{dt} = \frac{de}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}$

En utilisant l'équation de conservation de la masse, cela conduit :

$$\rho\frac{dh}{dt} = \rho\frac{de}{dt} + \frac{dp}{dt} + p\vec{\nabla}.\vec{u}$$

On introduisant dans l'équation conservation de l'énergie interne :

$$\rho\frac{de}{dt} = -p\vec{\nabla}.\vec{u} + \bar{\bar{s}}:\bar{\bar{\varepsilon}} - \vec{\nabla}.\vec{\varphi} = \rho\frac{dh}{dt} - \frac{dp}{dt} - p\vec{\nabla}.\vec{u}$$

Soit :

$$\rho\frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt} - \bar{\bar{s}}:\bar{\bar{\varepsilon}} - \vec{\nabla}.\vec{\varphi}$$

Comme l'enthalpie dépend de la température et de la pression :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial h}{\partial T}\frac{dT}{dt}$$

De plus, on montre que la différentielle totale exacte de l'enthalpie spécifique est (le lecteur est encouragé à se reporter à un ouvrage de thermodynamique pour la démonstration) : $dh = C_p dT + (k + \nu)dp$ avec $C_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p$ qui est la chaleur massique à pression constante et $k = -T\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T$ où s est l'entropie spécifique et $\nu = \frac{1}{\rho}$ est le volume massique. On a alors :

$$\frac{\partial h}{\partial p} = \nu - T\left(\frac{\partial \nu}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{\rho}\,T\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{\rho} + \frac{T}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{\rho}(1 - T\beta_p)$$

Où : $\beta_p = -{}^{1}\!/_{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p$ est le coefficient de dilatation thermique à pression constante.

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\rho}\left(1 - \beta_p T\right)\frac{dp}{dt} + C_p\frac{dT}{dt}$$

Finalement, la relation de conservation de l'énergie interne s'écrit :

$$\rho\frac{dh}{dt} = \left(1 - \beta_p T\right)\frac{dp}{dt} + \rho C_p\frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} + \bar{\bar{s}}:\bar{\bar{\varepsilon}} - \vec{\nabla}.\vec{\varphi}$$

Soit : $\rho C_p\frac{dT}{dt} = \beta_p T\frac{dp}{dt} + \bar{\bar{s}}:\bar{\bar{\varepsilon}} - \vec{\nabla}.\vec{\varphi}$

Remarque : pour les gaz assimilables à des gaz parfaits on a $\beta_p = \frac{1}{T}$

La densité de flux de chaleur φ est donnée par la loi phénoménologique de Fourier :

$$\vec{\varphi} = -\lambda\vec{\nabla}T$$

En utilisant la dérivée particulaire, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit alors :

$$\rho C_p\left(\frac{dT}{dt} + \vec{u}.\vec{\nabla}T\right) = \beta_p T\frac{dp}{dt} + \bar{\bar{s}}:\bar{\bar{\varepsilon}} - \vec{\nabla}.\vec{\varphi}$$

On retrouve dans cette équation les deux modes de transfert de la chaleur :

• la diffusion $\vec{\nabla}.(\lambda\vec{\nabla}T$

• le transport (ou convection) $\rho C_p\vec{u}.\vec{\nabla}T$

Le terme source $\bar{\bar{s}}:\bar{\bar{\varepsilon}}$ (produit tensoriel du tenseur de vitesse de déformation par le tenseur déviateur des contraintes) est le terme de dissipation thermique et ne doit pas être considéré comme un mode de transfert de la chaleur mais il constitue un mode de production de la chaleur.

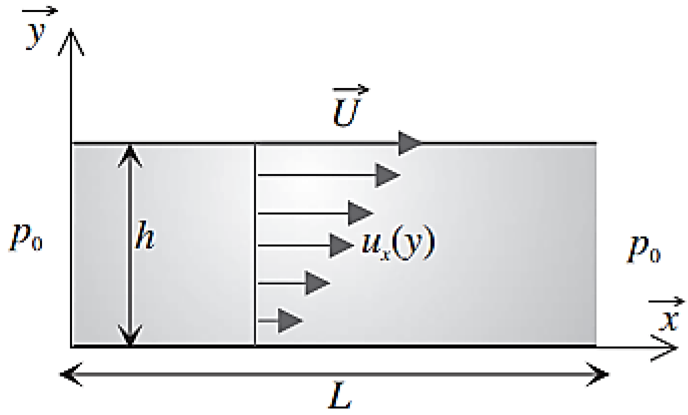
Exercice N°10

On considère l'écoulement plan entre deux plaques distantes de *h* dont l'une est mobile à la vitesse *U* et l'autre est fixe. La largeur des parois est grande devant *h* ainsi que la longueur notée *L*. Le fluide à un comportement newtonien et l'écoulement est incompressible et permanent. On néglige le poids du fluide devant les forces de viscosité.

1. Montrer que le champ de vitesse est de la forme : $\vec{u} = (u_x(y), 0,0)$.

2. À partir des équations de Navier-Stokes, montrer que le champ de pression est uniforme en tout point et égal à la pression atmosphérique p_0 et que $u_x(y) = Uy/h$

3. Calculer le débit masse de l'écoulement.



<u>Réponse</u>

1. L'écoulement est dans le plan (*xy*) et unidirectionnel selon x, on peut donc admettre que les composantes de vitesse selon *y* et *z* sont nulles. D'autre part l'écoulement est incompressible donc :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0 = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial u_y}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial u_z}{\partial z}}$$

On en déduit donc que

$$\vec{u} = (u_x(y), 0{,}0)$$

2. Les équations de Navier-Stokes se réduisent à :

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial u_x}{\partial t}} + \cancel{u_y\frac{\partial u_x}{\partial x}} + \cancel{u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}} + \cancel{u_y\frac{\partial u_z}{\partial z}}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \cancel{\rho g_x} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}}\right)$$

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial u_y}{\partial t}} + \cancel{u_y\frac{\partial u_x}{\partial x}} + \cancel{u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}} + \cancel{u_y\frac{\partial u_z}{\partial z}}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \cancel{\rho g_y} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}}\right)$$

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial u_z}{\partial t}} + \cancel{u_z\frac{\partial u_x}{\partial x}} + \cancel{u_z\frac{\partial u_y}{\partial y}} + \cancel{u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \cancel{\rho g_z} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}}\right)$$

Soit : $\begin{cases} 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \\ 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial y} \\ 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$

Les 2 dernières égalités nous disent que la pression ne dépend que de x et comme la vitesse ne dépend que de y, la première égalité nous dit que :

$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = K$, K est une constant

Ceci conduit à : $p(x) = Kx + C$ (où C est une constante). Comme $p = p_0$ en $x = 0$ et $x = L$, on en déduit donc que $K = 0$ et $p = p_0$ partout. Les conditions d'adhérence du fluide aux parois sont :

$$\begin{cases} u_x(y=0) = 0 \\ u_x(y=h) = U \end{cases} \qquad (1)$$

L'intégration $\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$ sous la forme

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0 \Longrightarrow u_x = ay + b$$

On trouve les constantes a et b avec la relation (1), ce qui conduit à :

$$u_x(y) = Uy/h$$

3. le débit masse par unité de largeur de plaque est :

$$Q_m = \rho \int_0^h u_x(y)\,\mathrm{d}y = \rho U \frac{h}{2}$$