Exercice N°1

Démontrer, pour un écoulement turbulent que :

a- $\overline{U.V} = \overline{U}.\overline{V} + \overline{U'.V'}$

b- $\overline{U(t)} = \overline{U}$

c- $\overline{U.V.W} = \overline{U}.\overline{V}.\overline{W} + \overline{U}\,\overline{V'.W'} + \overline{V}\,\overline{U'.W'} + \overline{W}\,\overline{U'.V'} + \overline{U'.V'.W'}$

Réponse

a- $\overline{U.V} = \overline{(\overline{U}+U').(\overline{V}+V')} = \overline{\overline{U}.\overline{V} + \overline{U}.V' + U'\overline{V} + U'.V'} = \overline{\overline{U}.\overline{V}} + \overline{\overline{U}.V'} + \overline{U'\overline{V}} + \overline{U'V'}$

$= \overline{\overline{U}}.\overline{\overline{V}} + \overline{\overline{U}}.\overline{V'} + \overline{U'}.\overline{\overline{V}} + \overline{U'}.\overline{V'}$

Et puisque $\overline{U}.\overline{V'} = \overline{U'}.\overline{V} = 0$

$\Rightarrow \overline{U.V} = \overline{U}.\overline{V} + \overline{U'.V'}$

b- $\overline{U(t)} = \overline{\overline{U} + U'} = \overline{\overline{U}} + \overline{U'} = \overline{U} + \overline{U'}$

Et puisque $\overline{U'} = 0 \;\Rightarrow \overline{U(t)} = \overline{U}$

c- $\overline{U.V.W} = \overline{(\overline{U}+U').(\overline{V}+V').(\overline{W}+W')}$

$= \overline{\overline{U}.\overline{V}.\overline{W} + \overline{U}.V'.\overline{W} + U'.\overline{V}.\overline{W} + U'.V'.\overline{W} + \overline{U}.\overline{V}.W' + \overline{U}.V'.W' + U'.\overline{V}.W' + U'.V'.W'}$

$= \overline{\overline{U}.\overline{V}.\overline{W}} + \overline{\overline{U}.V'.\overline{W}} + \overline{U'.\overline{V}.\overline{W}} + \overline{U'.V'.\overline{W}} + \overline{\overline{U}.\overline{V}.W'} + \overline{\overline{U}.V'.W'} + \overline{U'.\overline{V}.W'} + \overline{U'.V'.W'}$

Et puisque $\overline{\overline{U}.V'.\overline{W}} = \overline{U'.\overline{V}.\overline{W}} = \overline{\overline{U}.\overline{V}.W'} = 0$

$\Rightarrow \overline{U.V.W} = \overline{U}.\overline{V}.\overline{W} + \overline{U}\,\overline{V'.W'} + \overline{V}\,\overline{U'.W'} + \overline{W}\,\overline{U'.V'} + \overline{U'.V'.W'}$

Exercice N°2

Montrer pour un écoulement de l'eau à 15 °C dans une conduite circulaire de diamètre D, que la condition de la turbulence du régime d'écoulement est conditionnée par :

$V > \frac{0{,}0026}{D}$, tout en considérant que le nombre de Reynolds critique est de 2300 ?

Montrer que pour un diamètre de l'ordre de 1 cm, le régime turbulent est assuré pour des vitesses V > 0,3 m/s ?

Réponse

On a : $\nu = \dfrac{0{,}0178}{1 + 0{,}0337.t + 0{,}000221\,t^2}$

A 15 °C : $\nu = 1{,}14.10^{-6}$ m²/s

Et on a : $\Re = \dfrac{V.D}{\nu} > 2300$: condition de la turbulence.

$$\Rightarrow V > \frac{2300.\nu}{D} = \frac{2300.1{,}14.10^{-6}}{D} = \frac{0{,}0026}{D}$$

$$\Rightarrow V > \frac{0{,}0026}{D}$$

Pour D = 1 cm $\Rightarrow$ V > 0,26 m/s
Pour V > 0,3 m/s : le régime turbulent est suffisamment assuré.

Exercice N°3

Démontrer pour un écoulement turbulent d'un fluide incompressible, que l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \text{ ?}$$

Réponse

Pour un fluide incompressible : $divV = 0$,

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \Leftrightarrow \frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{v}+v')}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{w}+w')}{\partial z}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}+\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0$$

Et puisque $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}=\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}=\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}=0$

$$\Rightarrow \frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0$$

Exercice N°4

Démontrer que pour un écoulement turbulent :

1- $\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}=0$

2- $\overline{\frac{v\partial u}{\partial y}}=\bar{v}.\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\overline{v'.\frac{\partial u'}{\partial y}}$

3- $\overline{u^2}=\bar{u}^2+\overline{u'^2}$

Réponse

1- $\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}=\overline{\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}}+\overline{\frac{\partial u'}{\partial t}}=\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\overline{\frac{\partial u'}{\partial t}}=\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial \bar{u'}}{\partial t}$

Et puisque $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}=0$ et $\frac{\partial \bar{u'}}{\partial t}=0$

$$\Rightarrow \overline{\frac{\partial u}{\partial t}}=0$$

2- $\overline{\frac{v\partial u}{\partial y}}=\overline{(\bar{v}+v').\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial y}}=\overline{\bar{v}.\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}+\overline{v'.\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}+\overline{\bar{v}.\frac{\partial u'}{\partial y}}+\overline{v'.\frac{\partial u'}{\partial y}}$

$$=\bar{v}.\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\bar{v'}.\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\bar{v}.\frac{\partial \bar{u'}}{\partial y}+\overline{v'.\frac{\partial u'}{\partial y}}$$

Et puisque $\overline{v'} = \dfrac{\partial \overline{u'}}{\partial y} = 0$

$$\Rightarrow \overline{\frac{v\partial u}{\partial y}} = \overline{v}.\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \overline{v'.\frac{\partial u'}{\partial y}}$$

3- $\overline{u.v} = \overline{(\overline{u}+u').(\overline{u}+u')} = \overline{u}^2 + \overline{u'^2} + 2\overline{\overline{u}.u'}$

Et puisque $\overline{\overline{u}.u'} = \overline{u}.\overline{u'} = 0$

$$\Rightarrow \overline{u^2} = \overline{u}^2 + \overline{u'^2}$$

<u>Exercice N°5</u>

Comparer entre le tenseur des tensions visqueuses d'un écoulement laminaire, et un écoulement turbulent pour un fluide incompressible ?

<u>Réponse</u>

Pour un fluide incompressible, nous avons : *div(V)* = 0.

Le tenseur des tensions s'exprime comme :

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

Pour un écoulement laminaire, les éléments du tenseur s'écrivent comme :

$$\sigma_{xx} = -p_x - \frac{2}{3}.\mu.divV + 2\mu.\frac{\partial u}{\partial x} = -p_x + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\sigma_{yy} = -p_y - \frac{2}{3}.\mu.divV + 2\mu.\frac{\partial v}{\partial y} = -p_y + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\sigma_{zz} = -p_z - \frac{2}{3}.\mu.divV + 2\mu.\frac{\partial w}{\partial z} = -p_z + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}$$
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu.(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})$$
$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu.(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})$$
$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu.(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y})$$

Pour un écoulement turbulent, les éléments du tenseur s'écrivent comme :

$$\sigma_{xx} = -p_x + 2\mu.\frac{\partial u}{\partial x} + -\rho.\overline{u'^2}$$
$$\sigma_{yy} = -p_y + 2\mu.\frac{\partial v}{\partial y} + -\rho.\overline{v'^2}$$
$$\sigma_{zz} = -p_z + 2\mu.\frac{\partial w}{\partial z} + -\rho.\overline{w'^2}$$
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu.(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) + -\rho.\overline{u'.v'}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu.(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) + -\rho.\overline{u'.w'}$$
$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu.(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}) + -\rho.\overline{v'.w'}$$

Le tenseur des tensions visqueuses d’un écoulement turbulent comme est présenté, est la somme du tenseur d’un écoulement laminaire et le tenseur de Reynolds.

Car le tenseur de Reynolds s’écrit comme :

$$\sigma_{xx} = -\rho.\overline{u'^2}$$
$$\sigma_{yy} = -\rho.\overline{v'^2}$$
$$\sigma_{zz} = -\rho.\overline{w'^2}$$
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\rho.\overline{u'.v'}$$
$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\rho.\overline{u'.w'}$$
$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\rho.\overline{v'.w'}$$