CHAPTER 1

RÉSOLUTION DE SYSTÈMES LINÉAIRES

Introduction

Système d'équations linéaires

Un système d'équations linéaires de m équations linéaires à n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est un ensemble d'équations de

la forme :

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \tag{1.1}$$

où les a_{ij} et b_j sont des scalaires donnés. Si les b_j sont tous nuls, on parle d'un système homogène,

et $x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0$ est automatiquement solution

Forme matricielle d'un système linéaire

Le système (1) peut aussi s'écrire sous la forme matricielle $Ax = b$.

Où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$

Résoudre le système $Ax =$ brevient à trouver le vecteur x qui vérifie le système linéaire (1).

L'existence et l'unicité de la solution d'un SL

Soit le système linéaire $Ax = b$, avec$A$une matrice carrée d'ordre n

Le système $Ax = b$ admet une solution unique si :

-La matrice A est inversible ($detA \neq 0$).

-$rang(A) = n$.

-Le système homogène $Ax = 0$, admet seulement la solution nulle.

1.1 *Méthodes de résolution d'un système linéaire*

1.1.1 *Méthode de Cramer*

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n et $b = (b_i)$, $i = 1, \ldots, n$, un vecteur colonne.

-Si $det(A) \neq 0$, (A est dite régulière), alors le système $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = 1, ..., n$ admet une solution unique $x = (x_i)$ telle que :

$$x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)}, \quad i = 1, \ldots, n$$

avec A_i la matrice obtenue en remplaçant la $i-$ème colonne de A par le vecteur b.

- Si $det(A) = 0$, (A est dite singulière) le système linéaire a une infinité de solutions ou n'a pas de solution.

1.1.2 *Les méthodes directes*

Les méthodes directes permettent d'obtenir la solution en un nombre fini d'opérations. Les principales méthodes sont :

- *L'élimination de Gauss,*
- *La décomposition LU.*
- *La décomposition de Cholesky.*
- *La décomposition QR.*

Ces méthodes sont utilisées pour les matrices pleines et les petits systèmes

1.1.3 *Les méthodes itératives*

Les méthodes itératives consistent à construire une suite (x_n) qui converge vers la solution. Les principales méthodes sont :

- *Méthode de Jacobi,*
- *Méthode de Gauss-Seidel,*
- *Méthode de relaxasin*
- *Méthode du gradient conjugué.*

Ces méthodes sont utilisées pour les matrices creuses et les grands systèmes.

1.2 *Méthodes directes*

1.2.1 *La méthode de GAUSS (élimination de Gauss)*

La résolution de $Ax = b$ est très facile dans plusieurs cas

- *Si la matrice A est diagonale.*
- *Si la matrice A est orthogonale : $A^{-1} = A^t$.*
- *Si la matrice A est triangulaire supérieure ou inferieure.*

Les opérations élémentaires pour la triangularisation d'une matrice:

- *Multiplication d'une ligne L_i par un scalaireλ non nul : $L_i \leftarrow \lambda L_i$.*
- *Addition de deux lignes : $L_i \leftarrow L_i + L_j$.*
- *Permutation de deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$.*

Systèmes équivalents

Deux systèmes sont équivalents si, et seulement si, ils peuvent être obtenus l'un à partir de l'autre avec uniquement des opérations élémentaires.

Remark 1 *Deux systèmes équivalents ont la même solution.*

Résolution des systèmes linéaires triangulaires :
Soit $Ax = b$, un système linéaire avec A une matrice triangulaire inversible.
Si A est triangulaire supérieure, alors le système $Ax = b$ s'écrit :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

On aura donc:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}, \text{ et } x_i = \frac{1}{a_{ii}}[b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j], \; i = n-1, ..., 2, 1$$

Le principe de la méthode d'élimination de Gauss

La méthode de triangularisation de Gauss, encore appelée méthode du pivot de Gauss ou élimination de Gauss, est fondée sur deux étapes:

Etape1

Transformation le système $Ax = b$ en un système triangulaire supérieur $A'x = b'$ comme suit $[A : b] \to [A' : b']$,i.e

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & ... & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & ... & a'_{2n} & b'_2 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & a'_{nn} & b'_n \end{pmatrix}$$

Etape2

Résolution du système triangulaire $A'x = b'$ par substitution arrière(dont la solution est exactement la solution du système $Ax = b$).

Algorithme

$1^{ère}$*étape :On pose*

$$A^{(1)} = A \quad et \quad b = b^{(1)}.$$

- *Si $a_{11}^{(1)} \neq 0$, on fait les affectations suivantes:*

$$\begin{aligned} L_1^{(2)} &\leftarrow L_1^{(1)} \quad \textit{i.e, la ligne est maintenue} \\ L_i^{(2)} &\leftarrow L_i^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)}, i = 2, ..., n. \end{aligned}$$

on obtient alors:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & ... & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & ... & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & ... & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & ... & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & ... & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & ... & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)}, \quad j = 1, ..., n \\ a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} a_{1j}^{(1)}, \quad i = 2, ..., n, j = 1, ..., n \\ b_1^{(2)} = b_1^{(1)} \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} b_1^{(1)}, \quad i = 2, ..., n \end{cases}$$

À la $(k+1)-$ième étape, on conserve les k premières lignes et les $(k-1)$ premières colonnes de $A^{(k)}$.

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k+1)} &= a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)}, i = k+1, ..., n, \quad j = k+1, ..., n \\ a_{ik}^{(k+1)} &= 0, i = k+1, ..., n, \\ b_i^{(k+1)} &= b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)}, i = k+1, ..., n, \end{aligned}$$

L'algorithme consiste alors à remplacer à chaque étape la matrice A par une matrice $A^{(k)}$ dont les $k-$iéme premiers vecteurs colonnes correspondent au début d'une matrice triangulaire.

En pratique, si le pivot $a_{kk}^{(k)}$ situé à la $k-$ième ligne et à la $k-$ième colonne, est nul, l'algorithme de Gauss n'est plus valable.

Dans ce cas on emploie des permutations de lignes et de colonnes appelées stratégies de pivot.

Exemple 1:Considérons le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 2 & 10 & 6 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$1^{ère}$*étape* : $a_{11}^{(1)} = 2 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 & 1 \\ 2 & 10 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$2^{\text{ère}}$*étape* $a_{22}^{(2)} = 2 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

$3^{\text{ère}}$*étape* *On résout le système*

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en remontant les équations : $x_3 = -\frac{1}{8}$, $x_2 = \frac{1}{8}$, $x_1 = \frac{1}{4}$;
Exemple 2:Considérons le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -20 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$1^{\text{ère}}$*étape* : $a_{11}^{(1)} = 1 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

$2^{\text{ère}}$*étape* $a_{22}^{(2)} = 0$, *on fait une permutation des ligne 2 et 3, et notre système devient :*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$3^{\text{ère}}$*étape* *On résout le système*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Comme le dernier système est triangulaire supérieur, on peut le résoudre facilement grâce à la méthode de la remontée.

$x_4 = 2$, $x_3 = 2$, $x_2 = 3$ $\quad x_1 = -7$;

1.2.2 *La méthode de décomposition LU*

Objectif. *Décomposer la matrice A en produit de deux matrices triangulaires, et ainsi ramener le*

système$Ax = b$ à la résolution de deux systèmes triangulaires.

Mineurs principaux d'une matrice

Definition 2 *Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R}$ où $\mathbb{C})$On appelle mineurs principaux de A les déterminants $\triangle_k = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1k} \\ ... & ... & ... \\ a_{k1} & ... & a_{kk} \end{vmatrix}$,pour $1 \leq k \leq n$.*

Proposition 3 *Soit A une matrice dont les mineurs principaux sont tous non nuls. Alors*

1- les pivots $a_{kk}^{(k)}$ sont non nuls,

2- il existe une matrice triangulaire inférieure L et une matrice triangulaire supérieure U telle que $A = LU$.

Proposition 4 *Soit $A \in M_n(\mathbb{R}\ )$ une matrice inversible. Si tous les mineurs principaux sont tous non nuls, il existe une unique décomposition LU de A avec $L_{ii} = 1$.*

Le principe de la méthode de décomposition LU :

On suppose que le système $Ax = b$ admet une unique solution

Cette méthode exprime la matrice A sous forme du produit d'une matrice triangulaire inférieure L à diagonale unité par une matrice triangulaire supérieure U :

$$A = LU$$

avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 & . & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 & . & 0 \\ . & . & . & 1 & 0 \\ L_{n1} & . & . & L_{n-1,n-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & . & U_{1n} \\ 0 & U_{22} & . & U_{2n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & U_{nn} \end{pmatrix}$$

Lee *système devient :*

$$LUx = b$$

soit

$$Ly = b \tag{1.2}$$

et

$$Ux = y \tag{1.3}$$

On résout le système (1.1) pour trouver le vecteur y, puis le système (1.2) pour trouver le vecteur x.

Calcule de L_{ij} et U_{ij}

1- Méthode de Gauss(avec pivot)

$$[A' : b'] = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & ... & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & ... & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

On pose

$$U = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & ... & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & ... & a_{2n}^{(2)} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}, \text{et } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ L_{21} & 1 & . & . & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 & . & 0 \\ . & . & . & 1 & 0 \\ L_{n1} & . & . & L_{n-1,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

avec $L_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$, et on montre que $A = LU$

Exemple : pour $n = 3$

on $U = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)}. \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ .0 & .0 & a_{33}^{(3)} \end{pmatrix}; L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix}, \quad L_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$

d'où

$$L_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{a_{21}}{a_{11}}, \; L_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{a_{31}}{a_{11}}, \quad L_{32} = \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$$

Ainsi

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ \dfrac{a_{31}}{a_{11}} & \dfrac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)}. \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ .0 & .0 & a_{33}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = A$$

car $\quad a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)}, i = k+1, ..., n, \quad j = k+1, ..., n.$

2- Méthode de Coût(sans pivot)
On a

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 & . & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 & . & 0 \\ . & . & . & 1 & 0 \\ L_{n1} & . & . & L_{n-1,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & . & U_{1n} \\ 0 & U_{22} & . & U_{2n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & U_{nn} \end{pmatrix} = A$$

1.2.3 *La décomposition de Cholesky.(le cas des matrices symétriques)*

Dans le cas des matrices symétriques, on a une décomposition LU où L et U sont transposées l'une de l'autre.

Matrices symétriques :

Definition 5 *Une matrice* A *est dite symétrique si :*$A^t = A$.

Matrices définies positives :

Definition 6 *Soit* A *une matrice carrée d'ordre* n, A *est dite définie positive si :*

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \;\; < Ax, x >= x^t A x \geq 0.$

Theorem 7 *Une matrice* A *est définie positive si et seulement si tous ses mineurs :*

$\triangle_1 = a_{11}, \triangle_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \triangle_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \triangle_n = \det(A),$ *sont strictement positifs.*

Proposition 8 *Si* $A \quad A \in M_n(\mathbb{R}\ )$ *une matrice inversible, alors* $A^t A$ *est une matrice symétrique définie positive.*

Remark 9 *Toute matrice définie positive est inversible, la réciproque n'est pas vraie.*

Principe de la décomposition de Cholesky.

Theorem 10 *(Cholesky.)Soit A Une matrice carrée d'ordre n, non singulière et symétrique. Pour qu'il existe une matrice triangulaire inférieure L, telle que $A = LL^t$, il faut et il suffit que A soit définie positive.*

Algorithme de décomposition

Afin d'obtenir les éléments L_{ij} de la matrice L on multiplie les matrices L et L^t, puis on identifie... e les coefficients respectifs dans l'égalité : $A = LL^t$

D'où, l'on déduit successivement (en choisissant systématiquement le signe +) :

$$\begin{cases} L_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ L_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2 \quad ,} \quad i = 2, ..., n \\ L_{ij} = \frac{1}{L_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} L_{jk} \right), i > j \\ L_{ij} = 0, \quad i < j \end{cases}$$

Soit le système linéaire suivant :$Ax = b$, où A est une matrice symétrique définie positive, alors pour la résolution on procède par les étapes suivantes :

1. Décomposition de A : $A = LL^t$ avec L est triangulaire inférieure à éléments diagonaux positifs ;

2. Résolution du système triangulaire inférieur :$Ly = b$ et puis le système triangulaire supérieur : $L^t x = y$

Cette décomposition permet de :

- Calculer la matrice inverse A^{-1}
- Calculer $det(A)$, qui égal au carré du produit des éléments diagonaux de L

1.3 *Méthodes itératives*

Lorsque n est très grand la résolution d'un système linéaire d'ordre n par les méthodes directs est très compliquée. Alors on fait appel aux méthodes itératives. Le principe de base des méthodes itératives est de construire une suite de vecteurs (x_k) converge vers l'unique solution x^* du système $Ax = b$.

Dans les méthodes itératives, le système $Ax = b$ est mis sous la forme $Mx = Nx + b$. Lorsque la matrice M est inversible,

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

Selon les choix des matrices M et N on a différentes méthodes itératives. On note la matrice D formée des seuls éléments diagonaux de A , $-E$ la matrice formée des a_{ij} si $i > j$ et $-F$ la matrice formée des a_{ij} si $i < j$, de sorte que $A = D - (E + F)$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \ -E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \ -F = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & 0 & ... & a_{2n} \\ . & . & . & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix},$$

1.3.0.1 Méthode de Jacobi

Dans la méthode de Jacobi, on pose $A = M - N$ telle que $M = D$ et $N = E + F$,ce qui donne les itérations:

$$Dx^{(n+1)} = (E + F)x^{(n)} + b$$

La matrice

$$J = M^{-1}N = D^{-1}(E + F) = I - D^{-1}A$$

est appelée matrice de Jacobi.

Algorithme de Jacobi

$$\begin{cases} x^{(0)} \ \textit{donné} \\ x^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}}[b_i - \sum_{\ i\neq j, j=1} a_{ij}x^{(k)} \quad i = 1, ..., n \end{cases}$$

Convergence de la méthode de Jacobi

Definition 11 *On dit que une matrice A est à digonale strictement dominante si:*

$$\begin{aligned} |a_{ii}| &> \sum_{j=1, i\neq j} |a_{ij}|, \text{pour tout } \ i \\ \text{ou si } |a_{jj}| &> \sum_{i=1, i\neq j} |a_{ij}|, \text{pour tout } j \end{aligned}$$

Theorem 12 *Si A une matrice à digonale strictement dominante, alors la méthode de Jacobi appliquée au système $Ax = b$ est convergente pour tout $x^{(0)}$.*

1.3.0.2 Méthode de Gauss-Seidel

Dans la méthode de Gauss-Seidel, on pose $A = M - N$ telle que $M = D - E$ et $N = F$,ce qui donne les itérations:

$$x^{(n+1)} = (D-E)^{-1}Fx^{(n)} + (D-E)^{-1}b$$

Algorithme de Gauss-Seidel

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}}[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} \quad i = 1, ..., n \end{cases}$$

Convergence de la méthode de Gauss-Seidel

Theorem 13 *Si A une matrice à digonale strictement dominante, alors la méthode de Gauss-Seidel appliquée au système $Ax = b$ est convergente pour tout $x^{(0)}$.*

Theorem 14 *Si A est définie positive alors la méthode de Gauss-Seidel appliquée au système $Ax = b$ est convergente pour tout $x^{(0)}$.*