Série d'éxercices N°1 (Méthodes Directs)

Exercice 01. Résoudre les systèmes suivants par la méthode d'élémination de Gauss:

$$(S1)\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3=10 \\ x_1+x_2+4x_3=-9 \\ 7x_1+5x_2+x_3=14 \end{cases} \quad (S2)\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=1 \\ 3x_1-x_2+2x_3=7 \\ 8x_1+2x_2-2x_3=9 \end{cases} \quad (S3)\begin{cases} x_1-3x_2+7x_3=-4 \\ x_1+2x_2-3x_3=6 \\ 7x_1+4x_2-x_3=22 \end{cases}$$

$$,(S4)\begin{cases} 8x_1+3x_2+2x_3=5 \\ 4x_1+1,5x_2+2x_3=3,5 \\ 16x_1+8x_2+x_3=8 \end{cases} \quad (S5)\begin{cases} -x_2+2x_3+13x_4=5 \\ x_1-2x_2+3x_3+17x_4=4 \\ -x_1+3x_2-3x_3-20x_4=-1 \end{cases}$$

Exercice 02. Soient les systèmes $Ax=b$ et $Bx=c$ où

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -7 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 20 \end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

1-Résoudre le système $Ax=b$ par la méthode d'élémination de Gauss avec pivot partiel.

2-Résoudre le système $Bx=c$ par la méthode d'élémination de Gauss avec pivot total.

Exercice 03. Donner la factorisation LU de la matrice A suivante:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

-Résoudre le système $Ax=b$ où $b=(3,5,-1)^t$.

Exercice 04 Soit le système

$$(1)\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=2 \\ 2x_1+x_2+x_3=7 \\ 4x_1-3x_2+2x_3=4 \end{cases}$$

1- Ecrire le système (1)sous forme matricielle $Ax=b$

2-Résoudre le système $Ax=b$ par la méthode de Gauss

3-Factoriser la matrice A en produit LU (utiliser la technique du pivot), puis résoudre le système (1).

Exercice 05.Soit le système linéaire :

$$(S)\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=5 \\ 2x_1+6x_2-5x_3=9 \\ x_1-2x_2+7x_3=-5 \end{cases}$$

1-Ecrire le système (S) sous la forme $Ax = b$.

2.Montrer que A admet une unique factorisation LU.

3.Résoudre le système (S) par l'algorithme de Gauss avec pivot partiel.

2.Factoriser la matrice A (sans utiliser la technique du pivot) et résoudre le système(S).

3.Calculer le déterminant de A.

Exercice 06

Considérons le système linéaire $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}$$

1-Montrer que la matrice A admet une unique factorisation LU.

3- Effectuer la factorisation de Cholesky de A.

4- Utiliser cette factorisation pour résoudre le système linéaire. $Ax = b$.

Exercice 07 Soit la matrice A définie par:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

1- Donner la décomposision en LU de la matrice A.

2-Résoudre le systèmes linéaire $Ax = b$ où $b = (0, 0, 1, 0)^t$.

Exercice 8. Soit le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix}$$

1-Montrer que A est une matrice symétrique définie positive.

2-Déterminer une matrice L triangulaire inférieure et inversible telle que $A = LL^t$

3-En déduire une solution du système $Ax = b$.