Université Mohamed BOUDIAF M'sila
Faculté des mathématiques et informatique
Département de mathématiques
Analyse num.2
2023/2024

Série d'éxercices N°2(Méthodes itératives)

Exercice 01. *Soient les matrices*:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

1.*Calculer les normes* $\|.\|_1$, $\|.\|_\infty$ *et* $\|.\|_2$ *de chacune des matrices* A *et* B
2.*Calculer le rayon spéctral* $\rho(A)$ *et* $\rho(B)$.

Exercice 02*:* Soit *le système linéaire suivant:*

$$(1) \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

1. *Montrer que les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel pour le système* (1) *sont convergentes.*
2. *Résoudre le système* (1) par *la méthode de Jacobi et Gauss-Seidel à partir de* $x^{(0)} = (0,0,0)^t$,(*faire seulement les trois premiers itérations*).
3.*Calculer le rayon spéctral* $\rho(B_{GS})$ *et* $\rho(B_J)$ *où* B_{GS} *et* B_J *désignent respectivement les matrices d'itération des méthodes de Gauss–Seidel et de Jacobi. Que vous remarquer?*

Exercice 03. *Appliquer la méthode de Jacobi au système*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ 3x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

1.*En partant de* $x^{(0)} = (0,0)^t$, *calculer les cinq premiers itérations. Remarquer que la méthode ne converge pas.*
2. *Refaire le même travail par la méthode de Gauss-Seidel et dire la quelle des deux méthodes diverge plus vite.*
3.*Reprendre ce système en permutant les deux équations. Que remarquer vous ?*

Exercice 04.*Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$ *on considére la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Pour qu'elles valeurs de* α, A *est-elle définie positive ?*
2. *Pour qu'elles valeurs de* α *la méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle ?*
3. *Ecrire la matrice* B_J *de l'itération de Jacobi.*
4. *Pour qu'elles valeurs de* α *la méthode de Jacobi converge-t-elle?*
5. *Ecrire la matrice* B_{GS} *de l'itération de Gauss-Seidel. Calculer le rayon spectral* $\rho(B_{GS})$

6. *Quelles valeurs de α favorisent une convergence plus rapide de la méthode de Gauss-Seidel par rapport à celle de Jacobi ?*

Exercice 05: *On considère la matrice* :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. *Trouver les valeurs propres de A.*
2. *A est-elle symétrique ?est-elle définie positive ?*
3. *On cherche à résoudre un système linéaire de la forme : $Ax = b$ avec une méthode itérative :*

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné}, \\ x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + C \end{cases}$$

Donner l'expression de la matrice M quand on utilise:
(i) Méthode de Jacobi. (ii) Méthode de Gausse-Seidel. (iii) Méthode de relaxation(on prend $\omega = \frac{1}{2}$). Ces méthodes sont elles convergentes ? Si oui, comparer leurs convergence.

Exercice 06:Soient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

1.*Montrer que, pour le système $Ax = b$, la méthode de Jacobi converge mais la méthode de GaussSeidel ne converge pas.*
2.*Montrer que, pour le système $Bx = b$, la méthode de Gauss-Seidel converge mais la méthode de Jacobi ne converge pas.*

Exercice 07:*Soit le système*

$$(*) \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

1. Montrer, sans le calcul des valeurs propres, que la méthode de Jacobi correspondante à $(*)$ converge quelque soit la condition initiale $x^{(0)}$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la méthode de Jacobi converge quelque soit la condition initiale $x^{(0)}$.
3. Donner les équations d'itérations de la méthode de Jacobi.
4. Reprendre les trois premières questions avec la méthode de Gauss-Seidel.
5. Calculer les trois premiers itérations obtenus par la méthode de Gauss-Seidel en partant de $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$.
6. Donner le nombre suffisant d'itérations pour que la méthode de Gauss-Seidel donne une solutions approchée de $(*)$ à 10^{-3} près.