Chapitre 1

Résolution Numérique des équations différentielles ordinaires EDO d'ordre un

1.0.1 Introduction

On s'interesse dans ce cours à la résolution numérique d'EDO du premier ordre avec conditions initiales du type:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t > t_0 \\ y(t_0) = y_0, \quad \text{condition initiale} \end{cases} \tag{1.0.1}$$

où $y : [t_0, t_n] \to \mathbb{R}$, et $f : [t_0, t_n] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Le problème (1.0.1) est appelé problème de Cauchy.

1.0.2 Existence et unicité

Théorème 1.0.1 *(de Cauchy)*

On suppose que

i) f est continue sur $[t_0, t_n] \times \mathbb{R}$

ii) Il existe une constante $L > 0$ telle que, pour tout $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, et $t \in [t_0, t_n]$

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| .$$

Alors le problème de Cauchy(1.0.1) admet une solution unique sur $[t_0, t_n]$.

1-La condition ii) est appelée condition de cauchy lipschitz par rapport à la deuxième variable y

2-Si la fonction $(t, y) \to \dfrac{\partial f(t,y)}{\partial y}$est continue et bornée sur $[t_0, t_n] \times \mathbb{R}$,alors pour que la condition ii) est vérifier il suffit de prendre $L = \max_{[t_0,t_n]} \left| \dfrac{\partial f(t,y)}{\partial y} \right|$ et d'appliquer le théorème des accroissement finis à la fonction $y \to f(t, y), i.e.$

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = \left| \frac{\partial f(t,y)}{\partial y} (y_1 - y_2) \right| \leq L |y_1 - y_2|$$

Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \sin(y(t)), & t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Ce problème admet une solution unique car la fonction $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t, y(t)) = \sin(y(t))$ est continue sur $[0, 1] \times \mathbb{R}$,et elle vérifie d'après le théorème des accroissement finis

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |\sin(y_1) - \sin(y_2)| = |\cos(C_y)(y_1 - y_2)| \leq \max_{x \in \mathbb{R}} |\cos(x)| |y_1 - y_2| \leq |y_1 - y_2| ,$$

puisque $|\cos(x)| \leq 1$

donc pour tout $t \in [0, 1]$, et $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq |y_1 - y_2|$$

et le problème admet une solution unique.

1.0.3 Principe des méthodes numériques

On peut résoudre analytiquement que quelques types d' équations différentielles (par exemple les equations a variables séparables, linéaire, Bernoulli, Riccati...) mais il y a une large classe d'équations différentielles non résolubles analytiquement. La résolution numérique est ici essentielle, donc on sintéresse à la détermination d'une approximation de la solution exacte y du problème (1.0.1). Pour cela, on procède à une discrétisation du problème.

Le domaine de calcul $[t_0, t_n]$ est subdivisé en n sous intervalles $[t_i; t_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., n-1$, tous de longueur $h = \dfrac{t_n - t_0}{n}$ (pas de discrétisation), alors $t_i = t_0 + ih$, $i = 0, 1, ..., n-1$,et on cherche une approximation y_n de y en $t = t_n$ $(y_n \simeq y(t_n))$

L'intégration de l'équation (1.0.1), entre deux nœuds successifs t_i, t_{i+1} permet d'aboutir à l'expression :

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))dt \tag{1.0.2}$$

Dans les méthodes à pas simple, seulement l'information y_i disponible au nœud t_i est utilisée pour calculer la valeur de y_{i+1} au nœud t_{i+1}. L'équation(1.0.2), s'écrit sous la forme:

$$y_{i+1} = y_i + h\varphi(t_i, y_i) \tag{1.0.3}$$

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre l'équation différentielle (1.0.1)

1.0.4 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler est une procédure numérique qui permet de résoudre de façon approximative des équations différentielles ordinaires du premier ordre avec condition initiale.

Si $y(t)$ est la solution exact de (1.0.1) , $y(t)$ est approchée sur l'intervalle $[t_i; t_{i+1}]$.

Méthode d'Euler explicite

De l'équation (1.0.2) pour calculer $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))dt$, en choisissant la méthode des rectangles (point à gauche), on obtient :

$$\begin{cases} y_0 \text{ donné} \\ t_{i+1} = t_i + h, \;\; i = 0, 1, ..., n-1 \\ y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) \end{cases} \tag{1.0.4}$$

l'équation (1.0.4) s'appelle méthode d'euler explicite

Méthode d'Euler implicite

Pour calculer $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))dt$, en choisissant la méthode des rectangles (point àdroite), on obtient :

$$\begin{cases} y_0 \text{ donné} \\ t_{i+1} = t_i + h, \; i = 0, 1, ..., n-1 \\ y_{i+1} = y_i + hf(t_{i+1}, y_{i+1}) \end{cases} \tag{1.0.5}$$

l'équation (1.0.5) s'appelle méthode d'euler implicite

Méthode de Runge-Kutta 2

Pour calculer $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))dt$, en choisissant la méthode des rectangles (point milieu $\dfrac{t_i + t_{i+1}}{2} = t_i + \frac{h}{2}$), on obtient :

$$\begin{cases} y_0 \text{ donné} \\ t_{i+1} = t_i + h, \; i = 0, 1, ..., n-1 \\ y_{i+1} = y_i + hf(t_i + \frac{h}{2}, y(t_i + \frac{h}{2})) = y_i + hf(t_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}) \end{cases}$$

$y(t_{i+\frac{1}{2}})$ est calculé à l'aide du schéma d'Euler explicite :

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i) = y_i + \frac{k}{2}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} y_0 \text{ donné} \\ t_{i+1} = t_i + h, \; i = 0, 1, ..., n-1 \\ k = hf(t_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + hf(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k}{2}) \end{cases} \tag{1.0.6}$$

l'équation (1.0.6) s'appelle méthode de Runge-Kutta 2

Méthode de Runge-kutta 4

Pour calculer $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))dt$, en choisissant la méthode de simpson on obtient

$$\begin{cases} y_0 \text{ donné} \\ t_{i+1} = t_i + h, i = 0, 1, ..., n-1 \\ k_1 = hf(t_i, y_i) \\ k_2 = hf(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 = hf(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 = hf(t_i + h, y_i + k_3) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases} \tag{1.0.7}$$

l'équation (1.0.7) s'appelle méthode de Runge-Kutta 4

1.0.5 Erreur de convergence

Définition 1.0.1 *On appelle erreur globale de convergence*

$$e_n = y_n - y(t_n)$$

Exemple 1.0.1 *Soit à résoudre l'équation différentielle :*

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) + t + 1, \ t \in [0, 1] \\ y(0) = 1, \end{cases} \tag{1.0.8}$$

La solution exact du (1.0.8) est $y(t) = e^{-t} + t$.

Calculer une valeur approchée en utilisant les schémas décrits précédemment (prendre $h = 0.2$).

Solution

Les valeurs de $y(t)$ solution exacte pour $t \in [0, 1]$ avec $h = 0.2$ sont données par le tableau suivant :

t_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$y(t)$	1.0000	1.0187	1.0703	1.1488	1.2493	1.3679

1- **Euler explicite**

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ t_{i+1} = t_i + h, \ \ i = 0,1,2,3,4 \\ y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) = y_i + h(-y_i + t_i + 1) \end{cases}$$

Les valeurs de y pour $t \in [0,1]$ avec $h = 0.2$ sont données par le tableau suivant :

t_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y_i	1.0000	1.0000	1.0400	1.1120	1.2096	1.3277
Erreur	0	0.0187	0.0303	0.0368	0.0397	0.0402

2- **Runge-Kutta2**

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ t_{i+1} = t_i + h, \quad i = 0,1,2,3,4 \\ k = hf(t_i, y_i) = h(-y_i + t_i + 1 \\ y_{i+1} = y_i + hf(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k}{2}) = y_i + h(-(y_i + \frac{k}{2}) + t_i + \frac{h}{2} + 1) \end{cases}$$

Les valeurs de y pour $t \in [0,1]$ avec $h = 0.2$ sont données par le tableau suivant :

t_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y_i	1.0000	1.0200	1.0724	1.1514	1.2521	1.3707
Erreur	0	0.0013	0.0021	0.0026	0.0028	0.0028

3- **Runge-Kutta4**

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ t_{i+1} = t_i + h, \quad i = 0,1,2,3,4 \\ k_1 = hf(t_i, y_i) = h(-y_i + t_i + 1 \\ k_2 = hf(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}) = h(-(y_i + \frac{k_1}{2}) + t_i + \frac{h}{2} + 1) \\ k_3 = hf(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}) = h(-(y_i + \frac{k_2}{2}) + t_i + \frac{h}{2} + 1) \\ k_4 = hf(t_i + h, y_i + k_3) = h(-(y_i + k_3) + t_i + h + 1) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases}$$

Les valeurs de y pour $t \in [0,1]$ avec $h = 0.2$ sont données par le tableau suivant :

t_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y_i	1.0000	1.0187	1.0703	1.1488	1.2493	1.3679
Erreur	0	0	0	0	0	0