Série d'exercices N°3

Exercice 01.*Soit le probleme de Cauchy suivant*

$$\begin{cases} y'(t) = 2t - y(t), \quad t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Trouver la solution exacte de ce probleme.
2. Appliquer la méthode d'Euler à ce probleme,avec $h = 0.1$, puis evaluer la solution en $t = 0.3$. Comparer à la solution exacte.

Solution

1.**Solution exacte de cette equation**

En appliquant la methode de la variation de la constante, on trouve la solution genérale,

$$y(t) = 2t - 2 + 3e^{-t}$$

2-**Methode d'Euler**

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y(t_n)) \\ &= y_n + h(2t_n - y(t_n)) \\ &= y_n(1-h) + 2ht_n \end{aligned}$$

On a aussi $y(0) = y_0 = 1, h = 0.1, t_0 = 0, t_n = nh$

Donc

$$y_{n+1} = 0.9y_n + 0.02n$$

d'où le tableau

n	0	1	2	3
t_n	0	0.1	0.2	0.3
y_n	1	0.92	0.868	0.8412

C'est à dire que l'approximation en $t = 0.3$ de $y(t)$ avec le pas $h = 0.1$ est $y_3 = 0.8412$

Estimation de l'erreur.

La solution exacte ci-dessus donne $y(0.3) = 0.822$

$$|E_{Euler}| = |0.822 - 0.841| = 0.019$$

Exercice 02. *Soit le probleme de Cauchy suivant*

$$(1)\begin{cases} y'(t) = y(t) - \dfrac{2t}{y(t)}, \quad t \in [0,1] \\ y(0) = y(t_0) = 1 \end{cases}$$

On désire approcher, en effectuant le calcul avec six (06) décimales, la slution de (1) pour $h = 0.2$ en $t = 0.2$ à l'aide des méthodes de Runge-kutta d'ordre 2 et d'ordre 4

Solution

La solution exacte est

$$y(t) = \sqrt{2x+1}$$

1.Méthode de Rung-Kutta d'ordre2:

En utilisant l'algorithme correspondant, on obtient :

$$\begin{cases} t_1 = t_0 + h = 0.2 \\ k_1 = f(t_0, y_0) = f(0,1) = 1 \\ k_2 = f(t_1, y_0 + hk_1) = f(f(0.2, 1.2) = 0.866667 \\ y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 1.186667 \end{cases}$$

Ainsi

$$y(0.2) \approx y_1 = 1.186667$$

La valeur exacte est $\sqrt{1.4} = 1.183216$

L'erreur est

$$|E_r| = |y(0.2) - y_1| = |1.183216 - 1.186667| = 0.0003451$$

2.Méthode de Rung-Kutta d'ordre 4:

De l'algorithme correspondant il vient

$$\begin{cases} t_1 = t_0 + h = 0.2 \\ k_1 = f(t_0, y_0) = f(0,1) = 1 \\ k_2 = f(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1) = f(0.1, 1.1) = 0.918182 \\ k_3 = f(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_2) = f(0.1, 1.091818) = 0.908637 \\ k_4 = f(t_1, y_0 + hk_3) = f(0.2, 1.181727) = 0.843239 \\ y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.183229 \end{cases}$$

Ainsi

$$y(0.2) \approx y_1 = 1.183229$$

La valeur exacte est $\sqrt{1.4} = 1.183216$
L'erreur est

$$|E_r| = |y(0.2) - y_1| = |1.183216 - 1.183229| = 0.000013$$