UUniversité Mohamed BOUDIAF de M'sila *12/05/2024*
Faculté des mathématiques et de L'informatique *Niveau : L2*

Département de mathématiques *Module : Ana. Num.2*

Correction Examen final

Exercice 01 (10pts)

1-Le système($*$)peut être écrit sous forme matricielle $Ax = b$, où :

$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}$ .... (0.5)

2-Calculons les mineurs principaux de A :

$A_1 = \det(4) = 4 \neq 0$, $A_2 = \det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 20 - 4 = 16 \neq 0$,

$A_3 = \det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 43 \neq 0$............. (0.5)

Comme tous les mineurs principaux de A sont non nuls, A admet une décomposition LU................ (0.5)

3-

a) Symétrie :comme $A^t = A$, la matrice A est symétrique.................... (0.5)

b) Définie positivité : Pour montrer que A est définie positive, il faut vérifier que tous les mineurs principaux de A sont strictement positifs.

Calculons les mineurs principaux de A :

$A_1 = \det(4) = 4 > 0$, $A_2 = \det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 20 - 4 = 16 > 0$,

$A_3 = \det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 43 > 0$...................... (0.5)

Comme tous les mineurs principaux de A sont strictement positifs, A est définie positive.

4- Effectuer la factorisation de Cholesky de A:

La factorisation de Cholesky permet d'érire la matrice A comme le produit d'une matrice inférieure et de sa transposée, c'est-à-dire $A = LL^t$, où L est une matrice triangulaire inférieure.

Appliquons la factorisation de Cholesky à la matrice A :

$A = LL^t$, où $L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix}$, $LL^t = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .... (0.5) d'où

$L_{11} = 2, \quad L_{21} = 1, \ L_{31} = \dfrac{1}{2}, \ L_{22} = 2, \ L_{32} = \dfrac{1}{4}, \ L_{33} = \frac{\sqrt{43}}{4}, \quad$ d'où

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{43}}{4} \end{pmatrix} \text{.............} (1.5)$$

4- En déduire une solution du système $Ax = b$.

Nous allons résoudre le système $LL^t x = b$

posons $\begin{cases} Ly = b \\ L^t x = y \end{cases}$ .... (0.5)

$$Ly = b : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{43}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}, \text{ d'où } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{7}{2} \\ -\frac{\sqrt{43}}{2} \end{pmatrix} \text{...........} (01)$$

$$L^t x = y : \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{43}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{7}{2} \\ -\frac{\sqrt{43}}{2} \end{pmatrix}, \text{ d'où } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{...........} (01)$$

5-Vérifier que les processus itératifs de Jacobi et Gauss-Seidel, associés à ce système,convergent pour tout $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$

Vérifions que A est une matrice à diagonale strictement dominante

$|4| > |2| + |1|, \quad |5| > |2| + |1|, \quad |3| > |1| + |1|$

Par conséquent, la matrice A est à diagonale strictement dominante.Alors les processus itératifs de Jacobi et Gauss-Seidel, associés à ce système,convergent pour tout $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$............... (01)

6- Ecrire le système d'itération pour la méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel.

Système d'itération pour la méthode de Jacobi

$$\text{De} \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases} \text{ il vient } \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(6 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}\left(10 - 2x_1^{(k)} - x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{3}\left(-3 - x_1^{(k)} - x_2^{(k)}\right) \end{cases}, k = 0, 1, ..., n \text{............} (01)$$

Système d'itération pour la méthode de Gauss-Seidel.

$$\text{De} \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases} \text{ il vient } \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(6 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}\left(10 - 2x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{3}\left(-3 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}\right) \end{cases}, k = 0, 1, ..., \text{.............} (01)$$

Exercice 2.(10pts)
1-On a $y(t)=e^{-t}+t$ d'où $y'(t)=-e^{-t}+1=t+1-y(t)$....................................(01)
-Methode d'Euler
$y_{n+1}=y_n+hf(t_n,y(t_n))$
$\quad\quad =y_n+h(t_n-y_n+1)$ .... (0.5)
On a aussi $\quad y(0)=y_0=1,\ h=0.1,\ \ t_0=0, t_n=nh,$
donc $\quad y_{n+1}=1.1y_n+0.1$

d'où le tableau

n	0	1	2	3
t_n	0	0.1	0.2	0.3
y_n	1	1	$1,010000$	$1,03900000$

.... $(0.5\times 4=2)$

Donc l'approximation en $t=0.3$ *,est* $y_3=1,039000$................ (0.25)
Endéduire $y'(0.3)$.
Ona $y'(t)=t+1-y(t)$,alors $y'(0.3)=0.3+1-y_3=0.34081822$................................(01)
Estimation de l'erreur.

La solution exacte ci-dessus donne $y(0.3)=1,04081822$...................... (0.5)

$err=|1,04081822-1,03900000|=0.001818$.. (0.5)
2.Méthode de Rung-Kutta d'ordre 4

En utilisant l'algorithme correspondant, on obtient :
On a $h=0,2, t_0=0$

$$\begin{cases} t_1=t_0+h=0.2 \\ k_1=hf(t_0,y_0)=f(0,1)=0 \\ k2=hf(t_0+\frac{h}{2},y_0+\frac{k1}{2})=0,02 \\ k3=hf(t_0+\frac{h}{2},y_0+\frac{k2}{2})=0,218 \\ k4=hf(t_0+h,y_0+k3)=0,1964 \\ y_1=y_0+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)=1,0224133. \end{cases}$$ .... (03)

Donc l'approximation en $t=0.2$ *est* $y_1=1,0224133$.................................. (0.25)
Estimation de l'erreur.
La valeur exacte est $y(0.2)=1,0187307798$.. (0.5)
L'erreur est $\quad err = |y(0.2)-y_1| = |1,0187307798-1,0224133| =$ 0.00368226 .... (0.5)