Chapitre 1

Calcul des valeurs et vecteurs propres

1.0.1 Introduction

Nous abordons dans ce chapitre le problème du calcul de valeurs propres et, de vecteur propres d'une matrice carrée d'ordre n. C'est un problème beaucoup plus difficile que celui de la résolution d'un système linéaire. En effet, les valeurs propres d'une matrice sont les racines de son polynôme caractéristique. On pourrait naïvement penser qu'il suffit de factoriser le polynôme caractéristique d'une matrice pour obtenir ses valeurs propres, on sait cependant qu'il n'est pas toujours possible d'exprimer les racines d'un polynôme à partir des ses coefficients Par conséquent, il n'y a pas de méthode directe permettant le calcul des valeurs propres d'une matrice quelconque, on a donc recours à des méthodes itératives.

Définition 1.0.1 *Soit la matrice $A \in M_{n\times n}(\Bbbk)$, $(\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Un scalaire $\lambda \in \Bbbk$ s'appelle une valeur propre de A s'il existe un vecteur $x \in \Bbbk^n$, $x \neq 0$, tel que*

$$Ax = \lambda x \tag{1.0.1}$$

Le vecteur x s'appelle vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

Exemple 1.0.1 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$,

$x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 0$,

$x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur propre de A.

Définition 1.0.2 *L'ensemble des valeurs propres de A s'appelle le spectre de A, et noté $\sigma(A)$ ou $spec(A)$.*

Définition 1.0.3 *On appelle rayon spectral de la matrice A le maximum du module de ces valeurs propres. On le note $\rho(A)$:*

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in spec(A)\}$$

1.1 Polynôme caractéristique

Si λ une valeur propre d'une matrice carrée A d'ordre n, et $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ, alors l'équation

$$(A - \lambda I)\, x = 0 \tag{1.1.1}$$

possède une solution non nulle ou encore que $(A - \lambda I)$ est une matrice non inversible. Ceci ne peut se produire que pour les nombres λ pour lesquels

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

On voit que $P(\lambda)$ est un polynôme de degré n à coefficients réels qui appelé polynôme caractéristique de A.

Proposition 1.1.1 *λ une valeur propre de A si et seulement si $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$, c'est à dire λ est une racine du polynôme caractéristique P*

Proposition 1.1.2 *Soit A une matrice carrée A d'ordre n, les énoncés suivants sont équivalents :*

1- λ est une valeur propre de A et $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé,

2- λ est une racine réelle du polynôme caractéristique et x une solution du système homogène (1.1.1)

1.2 Méthodes directes

Les méthodes directs procèdent généralement en trois étapes:

1- Recherche des coefficient du polynôme caractéristique P .

2- Calcules des racines de P.

3- Obtention de vecteurs propres

1-Calcul direct de $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$: Pour $n = 2, 3, 4$ le déterminant d'une matrice est facile à calculer manuellement. Pour n assez grant il faut utiliser des méthodes itératives.

1.3 Méthodes itératives

Vecteur Propre Normalisé

Définition 1.3.1 *On dit qu'un vecteur propre x associé à la valeur propre λ d'une matrice A est un vecteur propre normalisé si*

$$\| x \| = 1.$$

1.3.1 Méthode de La puissance

La méthode de la puissance est un algorithme permettant de calculer la valeur propre de plus grand module (dominante) d'une matrice. Étant donné une matrice A, on cherche sa valeur propre de plus grand module et un vecteur propre normalisé qui lui est associé.

La méthode de la puissance permet de calculer la valeur propre de plus grand module sans passer par le calcul du polynôme caractéristique ou ses racines, qui est difficile pour des matrice d'ordre supérieur à deux.

Théorème 1.3.1 *Soit A une matrice carrée d'ordre n, et soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ses valeurs propres. Soit $\lambda_{\max}$ une valeur propre de A tel que*

$$|\lambda_{\max}| = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

Alors pour chaque vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^n$, et $x_0 \neq 0$, la suite définie par la relation de récurrence:

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n}{\|Ax_n\|} \tag{1.3.1}$$

vérifie

$$\lim_{k\to\infty} \|Ax_k\| = |\lambda_{\max}|$$

Remarque 1.3.1 *Cette méthode n'est appliqué que si :*

1 - La matrice A admet des valeurs et vecteurs propres réels.

2-$|\lambda_{\max}| > |\lambda_2| > ... > |\lambda_n|$; autrement la méthodes diverge ou peut encore altérer ou donner des valeurs complexes.

1.3.2 Méthode de la Puissance Inverse

La méthode de la puissance est un algorithme permettant de calculer la valeur propre ayant le plus petit module. On part du principe que les valeurs propre de la matrice A^{-1}son l'inverse des valeurs propres de la matrice A. Par conséquent, la méthode de la puissance appliquée à la matrice A^{-1}converge vers la valeur propre dominante de A^{-1}qui vaut $\frac{1}{\lambda \min}$, tel que $\lambda \min\min$ est la valeur propre ayant le plus petit module de la matrice A.

En d'autres termes, pour une matrice carrée A d'ordre n ayant les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ avec $\lambda_{\min}$ la valeur propre tel que $|\lambda \min| = \min_{1\leq i\leq n} |\lambda \min_i|$.

Pour chaque vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^n$, et $x_0 \neq 0$, la suite définie par la relation de récurrence:

$$x_{n+1} = \frac{A^{-1}x_n}{\|A^{-1}x_n\|} \tag{1.3.2}$$

vérifie

$$\lim_{n\to\infty} \left\|A^{-1}x_n\right\| = |\frac{1}{\lambda \min}|$$

Remarque 1.3.2 *Il faut noter qu'on pratique, il n'est pas nécessaire d'inverser la matrice A pour calculer la valeur de l'expression $A^{-1}x_n$ dans la relation (**??**), il est suffisant de résoudre le système $Ax = x_n$. Il est aussi fortement recommandé de calculer la factorisation LU (ou autre) de la matrice A avant de commencer le processus itératif afin de réduire la complexité des calculs effectués jusqu'à la convergence.*

1.3.3 Méthode QR

Cette méthode s'applique aux matrices quelconques. Le principe de cette méthode est:

Posons $A_1 = A$. On écrit la factorisation QR de A_1

$$A_1 = Q_1 R_1$$

et on forme

$$A_2 = Q_1 R_1 = Q_1^t A_1 Q_1$$

A l'étape k,

$$A_k = Q_k R_k$$

on pose

$$A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^t A_k Q_k$$

Par induction, on obtient

$$A_{k+1} = (Q_1 Q_2 ... Q_k)^t A (Q_1 Q_2 ... Q_k)$$

ce qui montre que A_{k+1} est semblable à A donc admet les mêmes valeurs propres.

Théorème 1.3.2 *Soit A une matrice carrée inversible et ayant des valeurs propres difféer-entes en module. C'est–à-dire qu'il existe une matrice P inversible vérifiant*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & . & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

De plus, on fait l'hypothèse que la matrice P^{-1} admet une factorisation LU, alors la suite A_k vérifie:

$$\begin{aligned} (A_k)_{ii} &\rightarrow {}_{k\rightarrow\infty}\lambda_i, \text{ pour } \quad i = 1, 2, ..., n \\ (A_k)_{ij} &\rightarrow {}_{k\rightarrow\infty}0, \text{ pour } j < i \end{aligned}$$

1- On ne peut rien dire sur la convergence de A_k si $j > i$.

2- Si A est réelle et que les valeurs propres sont différentes en module, ceci entraine que les valeurs propres sont tous réelles car sinon les valeurs propres complexes apparaissent par

paires de racines conjuguées, donc de même module ce qui est exclu par hypoth$\mu eseduthor\mu eme$.