

Université de M'Sila

Faculté des Mathématiques et d'Informatique / Département de Mathématiques

Master Maths. S 3/ Analyse fonctionnelle

– Espaces fonctionnels de type de Sobolev –

## Homework (Devoir maison) December 2024

\*\* (Utiliser les notations du cours)

\*\* (On tiendra compte de la présentation des copies)

**Exercise 1.** Give the definition of :

- (i) the functions  $\rho$  et  $\gamma$  such that  $\rho(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(2^{-j}\xi) = 1$  ( $\forall \xi \in \mathbb{R}$ ),
- (ii) the operators  $S_j$  et  $Q_j$ ,
- (iii) the spaces  $\mathcal{S}_{\infty}(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{S}'_{\infty}(\mathbb{R})$ ,  $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$  and  $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R})$ .
- (iv) Give examples of functions in  $\mathcal{S}'_{\infty}(\mathbb{R})$ .

**Exercise 2.** Prove that, if  $s > 0$  then

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}) = L_p(\mathbb{R}) \cap \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}).$$

**Exercise 3.** 1- Show that  $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R})$  is a Banach space.

2- Show that  $BMO$  is a Banach space modulo constants.

3- Prove that  $\log|x| \in BMO$ . Find a conclusion ?

**Exercise 4.** Let  $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  be such that  $\text{supp } \theta \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : a \leq |\xi| \leq b\}$ ,  $0 < a < b$ . Prove that

$$\theta(2^{-j}\xi) = \sum_{k=j+m_1}^{j+m_2} \theta(2^{-j}\xi)\gamma(2^{-k}\xi).$$

Find the numbers  $m_1$  and  $m_2$ .

=====

15.11.2024