PROGRAMMATION LINEAIRE

PRESENTATION

La programmation linéaire est un outil très puissant de la recherche opérationnelle. C'est un outil générique qui peut résoudre un grand nombre de problèmes. En effet, une fois un problème modélisé sous la forme d'équations linéaires, des méthodes assurent la résolution du problème de manière exacte. On distingue dans la programmation linéaire, la programmation linéaire en nombres réels, pour laquelle les variables des équations sont dans IR^+ et la programmation en nombres entiers, pour laquelle les variables sont dans *IN*. Bien entendu, il est possible d'avoir les deux en même temps. Cependant, la résolution d'un problème avec des variables entières est nettement plus compliquée qu'un problème en nombres réels.

Une des méthodes les plus connues pour résoudre des programmes linéaires en nombre réels est la méthode du Simplex. En théorie, elle a une complexité non polynômiale et est donc supposée peu efficace. Cependant, en pratique, il s'avère au contraire qu'il s'agit d'une bonne méthode.

De plus, de nombreux logiciels intégrant cette méthode existent. Certains sont utilisés via une interface graphique alors que d'autres permettent une communication par fichiers ce qui autorise l'utilisation du programme de manière cachée dans le développement d'un autre logiciel.

Programme linéaire

La programmation linéaire permet la résolution d'un programme linéaire. Un programme linéaire est un système d'équations ou d'inéquations appelées "contraintes" qui sont linéaires (c'est-à-dire que les variables ne sont pas élevées au carré, ne servent pas d'exposant, ne sont pas multipliées entre elles...). Et à partir de ces contraintes, on doit optimiser une fonction également linéaire appelée objectif.

Exemples

Contraintes linéaires:

$5x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 8$
$x_1 + 3x_2 + 8x_3 \geq 25$
$9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17$

Contraintes non linéaires:

$5x_1^2 + 2x_2 + 4x_3 = 8$
$x_1x_2 + 8x_3 \geq 25$

Objectifs:

$max: z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$ (signifie maximiser z)
$min: z = -3x_1 + x_3$ (signifie minimiser z)

Forme canonique

Pour résoudre un programme linéaire de manière automatique, il faut qu'il ait une certaine forme que l'on appelle "canonique". Dans ce cours, on a choisi la forme canonique suivante: un programme linéaire n'a que des contraintes d'infériorité et l'on tente de maximiser la fonction objectif. De plus toutes les variables sont positives.

Exemple

Le programme linéaire suivant est sous forme canonique.

$max: z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$

sous:
$5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8$
$x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25$
$9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17$
$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

Transformations

Tout programme linéaire quelconque peut être ramené à une forme canonique. Voici quelques exemples de transformations possibles.

Si une variable x_i est négative, on la remplace par une variable positive $x_i' = -x_i$. Par exemple:

$max: z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$	$\Rightarrow$	$max: z = 3x_1 - 2x_2 - 8x_3'$
sous:		*sous:*
$5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8$		$5x_1 - 2x_2 - 4x_3' \leq 8$
$x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25$		$x_1 + 3x_2 - 8x_3' \leq 25$

$9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17$
$x_1 , x_2 \geq 0$ *et* $x_3 \leq 0$

$9x_1 + 6x_2 + 3x_3' \leq 17$
$x_1 , x_2 , x_3' \geq 0$

Si une variable n'a pas de contrainte de signe, on la remplace par deux variables positives x_1' et x_1'' telles que $x_1 = x_1' - x_1''$. Par exemple:

$max: z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$

sous:
$5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8$
$x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25$
$9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17$
$x_1 , x_2 \geq 0$

$\Rightarrow$

$max: z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3' - 8x_3''$

sous:
$5x_1 - 2x_2 + 4x_3' - 4x_3'' \leq 8$
$x_1 + 3x_2 + 8x_3' - 8x_3'' \leq 25$
$9x_1 + 6x_2 - 3x_3' + 3x_3'' \leq 17$
$x_1 , x_2 , x_3' , x_3'' \geq 0$

Si le programme linéaire a une contrainte de supériorité, on la remplace par une contrainte d'infériorité en inversant le signe des constantes. Par exemple:

$max: z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$

sous:
$5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8$
$x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25$
$9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \geq 17$
$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

$\Rightarrow$

$max: z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$

sous:
$5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8$
$x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25$
$-9x_1 - 6x_2 + 3x_3 \leq -17$
$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

Si le programme linéaire a une contrainte d'égalité, on la remplace par deux contraintes équivalentes, l'une d'infériorité, l'autre de supériorité. Les variables du programme doivent satisfaire ces deux contraintes, ce qui revient alors à l'égalité de départ. Par exemple:

$max: z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$

sous:
$5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8$
$x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25$
$9x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 17$
$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

$\Rightarrow$

$max: z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$

sous:
$5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8$
$x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25$
$9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17$
$9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \geq 17$
$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

$\Rightarrow$

$max: z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$

sous:
$5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8$
$x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25$
$9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17$
$-9x_1 - 6x_2 + 3x_3 \leq -17$
$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

Application

Une entreprise fabrique *2* produits *X* et *Y*. Pour sa conception, chaque produit fini nécessite *3* produits intermédiaires *A*, *B* et *C*. Pour fabriquer un produit *X*, on a besoin de *2* produits *A*, de *2* produits *B* et de *1* produit *C*. De même, pour fabriquer un produit *Y*, on a besoin de *3* produits *A*, de *1* produit *B* et de *3* produits *C*. En outre, l'entreprise dispose d'une quantité limitée de produits *A*, *B* et *C*. Elle a *180* produits *A*, *120* produits *B* et *150* produits *C*. Sachant que le prix de revient de *X* est *3*dinars et que celui de *Y* est de *4*dinars, combien de produits *X* et *Y* faut-il fabriquer pour maximiser le profit ?

On modélise ce problème par un programme linéaire. Soit x et y les quantités de produits *X* et *Y* fabriqués.

La quantité totale de produits *A* utilisée est $2x + 3y$. Cette quantité ne doit pas dépasser *180*, d'où la première contrainte.

$2x + 3y \leq 180$

De même, pour les produits *B* et *C*, on obtient:

$2x + y \leq 120$
$x + 3y \leq 150$

Bien entendu, les quantités x et y sont positives.

$x , y \geq 0$

Enfin, on tente de maximiser le profit qui est le total des bénéfices sur la vente des produits *X* plus celui des produits *Y*.

$max: 3x + 4y$

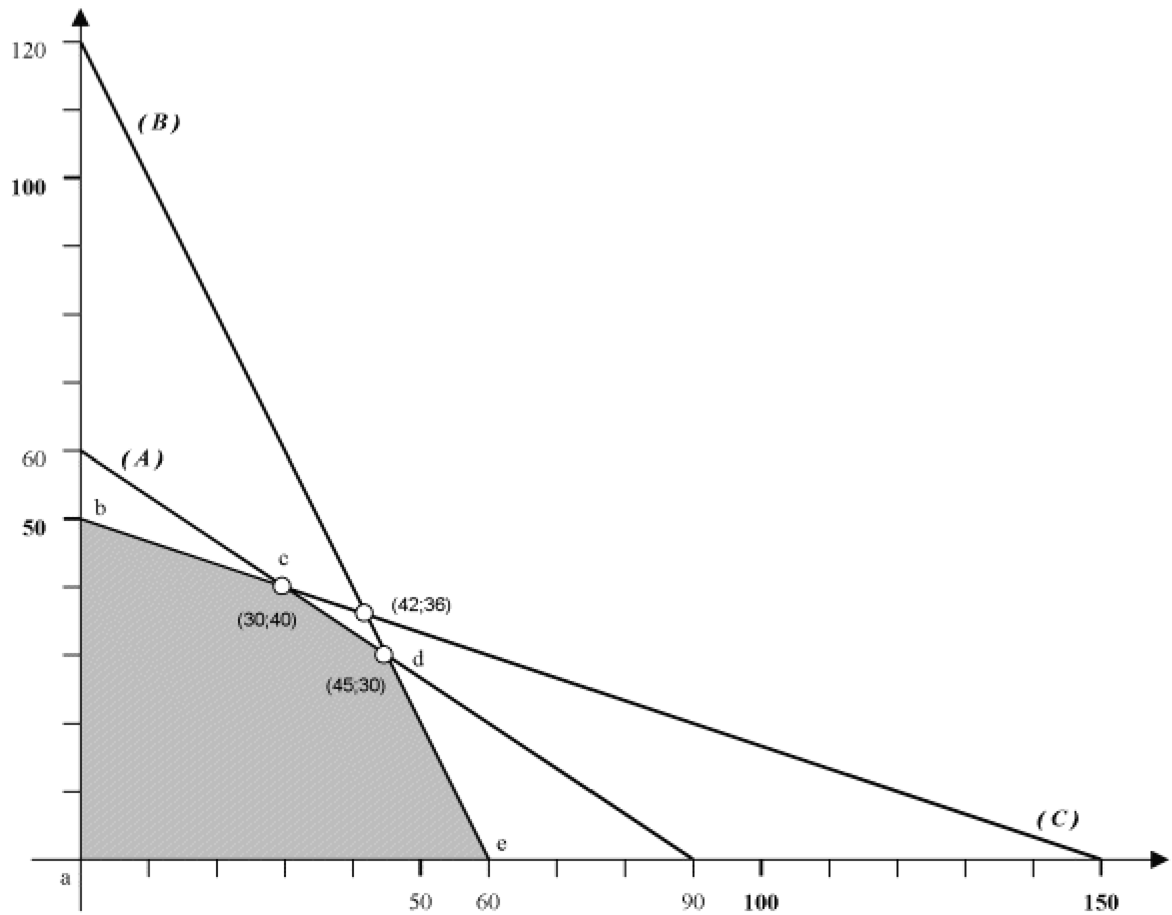
Le programme linéaire est donc le suivant.

$max: z = 3x + 4y$

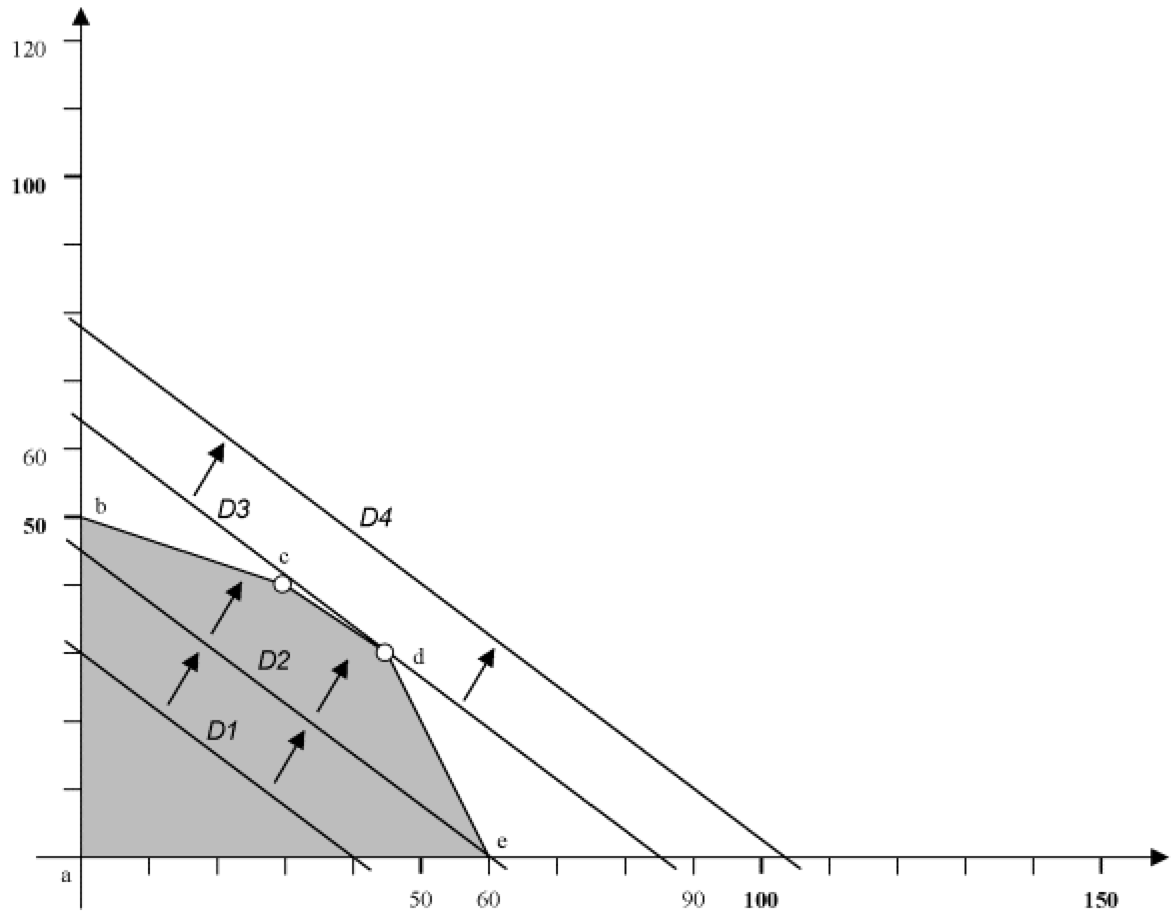
sous:
$2x + 3y \leq 180$ (A)
$2x + y \leq 120$ (B)
$x + 3y \leq 150$ (C)
$x , y \geq 0$

REPRESENTATION
GRAPHIQUE

On peut représenter le problème dans un espace à deux dimensions.



Les solutions admissibles sont représentées par la zone grisée *(a,b,c,d,e)*. Ce sont les solutions qui satisfont les contraintes. Considérons maintenant la fonction $z = 3x + 4y$. Pour $z = 120$, on a une droite $D1$, $3x + 4y = 120$, qui représente les solutions pour lesquelles le profit vaut 120. Si $z = 180$, on a une autre droite $D2$, $3x + 4y = 180$, qui représente les solutions pour lesquelles le profit vaut 180. On remarque que $D2$ est parallèle à $D1$ et on s'aperçoit facilement qu'en déplaçant la droite vers le haut on augmente le profit z. Donc pour résoudre graphiquement le problème, on va faire "glisser" la droite vers le haut jusqu'à ce qu'elle ait un minimum de points communs avec la surface grisée. Le point restant ici est d. Il représente la solution pour laquelle le profit est maximum. En effet, si on prend un profit plus important, représenté par exemple par $D4$, on s'aperçoit que toutes les solutions sont en dehors de la surface grisée. Donc la solution du problème est de produire 45 produits X et 30 produits Y pour obtenir le profit maximum de $z = 3x + 4y = 255$dinars.



LA METHODE DU SIMPLEX

Globalement, la méthode du Simplex va se déplacer le long de la forme *(a,b,c,d,e)*, de sommet en sommet jusqu'à trouver le meilleur point.

a) Forme canonique d'un Programme Linéaire

$$\begin{aligned}
\text{Max } z = \; & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots\dots\dots + c_nx_n \\
& a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}\,x_n \leq b_1 \\
& a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}\,x_n \leq b_2 \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
& x_1 \geq 0 \; ; \quad x_2 \geq 0 \; ; \quad \dots\dots\dots; \quad x_n \geq 0
\end{aligned}$$

b) Forme standard d'un Programme Linéaire

On transforme les inégalités des contraintes économiques en égalités par introduction de variables supplémentaires positives ou nulles appelées variables d'écart.
$a_{i1}x_1 + a_{i2}\,x_2 + \dots\dots\dots + a_{in}x_n \leq b_i$ devient $a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \dots\dots\dots + a_{in}x_n + t_i = b_i$
d'où la forme standard

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots\dots\dots + c_nx_n \\
&\quad a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}\,x_n + t_1 = b_1 \\
&\quad a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}\,x_n + t_2 = b_2 \\
&\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\quad a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}x_n + t_m = b_m \\
&\quad x_1 \geq 0\,;\ x_2 \geq 0\,;\ \dots\dots;\ x_n \geq 0\,;\ t_1 \geq 0\,;\ t_2 \geq 0\,;\ \dots\dots;\ t_m \geq 0
\end{aligned}
$$

c) Résolution

Afin de comparer avec la résolution graphique, nous pouvons considérer que nous sommes dans un espace à n dimensions (nombre de variables d'activité). Les contraintes délimitent un polyèdre convexe, région des solutions admissibles; la fonction objectif est un hyperplan que l'on va déplacer le plus loin possible de l'origine, jusqu'à l'extrême limite où il n'y aura plus qu'un point d'intersection (éventuellement un segment, un plan...) avec la région des solutions admissibles.
La solution se trouvant forcément sur le pourtour du polyèdre admissible, la méthode du simplexe consiste en itérations qui font passer d'un sommet du polyèdre à un autre en sélectionnant le sommet adjacent maximisant la fonction objectif.
Pour démarrer l'algorithme, il est nécessaire d'avoir une solution initiale. Dans le cas simple, l'origine est solution, c.à.d. que la première solution est $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; ....; $x_n = 0$; $t_1 = b_1$; $t_2 = b_2$; ....; $t_m = b_m$ (ceci suppose que les b_i ne soient pas négatifs pour satisfaire les contraintes de signe).

L'algorithme, basé sur la méthode du pivot de Gauss pour la résolution des systèmes d'équations linéaires, est présenté sous forme de tableau.

Soit à résoudre le programme linéaire suivant sous sa forme canonique

$$
\begin{aligned}
3\,x_1 + 4\,x_2 &\leq 160 \\
6\,x_1 + 3\,x_2 &\leq 180 \\
\text{Max } z = 1200\,x_1 + 1000\,x_2 & \\
x_1 \geq 0\,;\ x_2 \geq 0 &
\end{aligned}
$$

* Forme standard

$$\begin{array}{rrrrl} 3\,x_1 + & 4\,x_2 + & 1\,t_1 + & 0\,t_2 & = 160 \\ 6\,x_1 + & 3\,x_2 + & 0\,t_1 + & 1\,t_2 & = 180 \\ \text{Max } z = 1200\,x_1 + & 1000\,x_2 + & 0\,t_1 & 0\,t_2 & \end{array}$$

$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$

* Tableau 0
en ne conservant que les coefficients des équations ci-dessus, on obtient le tableau de départ

HB B	x_1	x_2	t_1	t_2	C
t_1	3	4	1	0	160
t_2	6	3	0	1	180
Δ	1200	1000	0	0	0

Ce tableau nous donne la première solution admissible:
- Les variables Hors Base (HB) (situées sur la première ligne du tableau) sont nulles: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$ (t_1 et t_2 en rouge ne sont pas hors base; elles ne sont présentes que pour rappeler qu'il s'agit des colonnes des coefficients de ces deux variables; lorsqu'on travaille sur papier, il est préférable d'indiquer la position de ces variables par des points pour bien montrer que seules x_1 et x_2 sont hors base). Cela signifie qu'on fabrique 0 pièces P1 et 0 pièces P2.

- Les valeurs des variables dans la Base (B) (apparaissant dans la première colonne) se lisent dans la colonne C: $t_1 = 160$ et $t_2 = 180$. Cela signifie qu'il reste 160 heures d'utilisation possible de l'atelier A1 et 180 heures de l'atelier A2.
- La dernière cellule (intersection de C et Δ) donne la valeur de -z : $-z = 0$ donc $z = 0$. Cela signifie que la marge est égale à 0.

- La ligne Δ donne les valeurs marginales ou taux marginal de substitution; elles s'interprètent de la manière suivante: à ce stade de la solution, une augmentation de 1 unité de x_1 ferait croître la fonction objectif de 1200, et une augmentation de 1 unité de x_2 ferait croître la fonction objectif de 1000. Cela signifie qu'à ce stade de la production si on augmente la production de 1 pièce de P1, la marge va augmenter de 1200 F et si on augmente la production de 1 pièce de P2, la marge va augmenter de 1000 F.

En effet, la solution actuelle est $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $t_1 = 160$; $t_2 = 180$
et $z = 1200 \,.\, x_1 + 1000 \,.\, x_2 + 0 \,.\, t_1 + 0 \,.\, t_2 = 1200 \,.\, 0 + 1000 \,.\, 0 + 0 \,.\, 160 + 0 \,.\, 180 = 0$
Si on augmente x_1 de 1 unité,

$z = 1200 . 1 + 1000 . 0 + 0 .0 . 160 + 0 . 180 = 1200$
Si on augmente x_2 de 1 unité,
$z = 1200 . 0 + 1000 . 1 + 0 .0 . 160 + 0 . 180 = 1000$

* Tableau 1
On augmente la fonction objectif en faisant entrer une variable dans la base, prenant la place d'une variable qui va sortir de la base.

Critère de sélection de la variable entrant dans la base:
On sélectionne la variable HB ayant le plus grand coefficient positif dans la ligne Δ .

x_1 entre donc dans la base

Pour sélectionner la variable sortant de la base, il est nécessaire de rajouter une colonne R au tableau, obtenue en faisant le rapport membre à membre de la colonne C et de la colonne de la variable entrant dans la base (x_1)

HB / B	x_1	x_2	t_1	t_2	C	R
t_1	3	4	1	0	160	160/3
t_2	6	3	0	1	180	30
Δ	1200	1000	0	0	0	

Critère de sélection de la variable sortant de la base:
On sélectionne la variable dans la Base ayant le plus petit coefficient positif dans la colonne R .

t_2 sort donc de la base

HB / B	x_1	x_2	t_1	t_2	C	R
t_1	3	4	1	0	160	160/3
t_2	6	3	0	1	180	30
Δ	1200	1000	0	0	0	

variable sortant

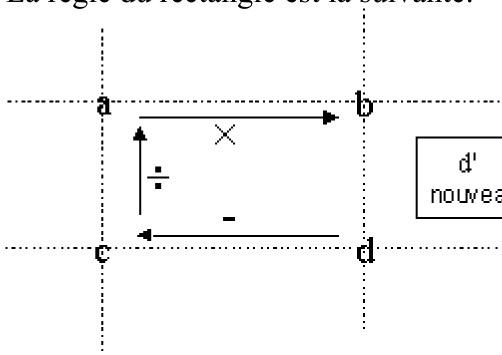
variable entrant

On appelle pivot (égal à 6) l'intersection de la variable entrante et de la variable sortante
Pour obtenir le tableau 1, on applique les règles suivantes:

- Le pivot est égal à 1
- Les coefficients de la ligne du pivot sont divisés par le pivot
- Les coefficients de la colonne du pivot sont nuls

- Les autres coefficients sont obtenus par la règle du rectangle

La règle du rectangle est la suivante:



$$\underbrace{d'}_{\text{nouveau}} = \underbrace{d}_{\text{ancien}} - (c \div a) \times b$$

<u>Remarque importante:</u> $d = d' \Leftrightarrow c\ b = 0 \Leftrightarrow b = 0$ ou $c = 0$
En conséquence, si dans la colonne (resp. ligne) du pivot il y a un 0, toute la ligne (resp. colonne) correspondante reste inchangée.

En appliquant ces règles on obtient le tableau 1:

HB B	x_1	x_2	t_1	t_2	C
t_1	0	5/2	1	-1/2	70
x_1	1	1/2	0	1/6	30
Δ	0	400	0	-200	-36000

Ce tableau nous donne la deuxième solution admissible:
- Les variables Hors Base (HB) sont nulles: $x_2 = 0$; $t_2 = 0$ (x_1 et t_1 en rouge ne sont pas hors base; elles ne sont présentes que pour rappeler qu'il s'agit des colonnes des coefficients de ces deux variables). Cela signifie qu'on fabrique 0 pièces P2 et qu'il reste 0 heure d'utilisation disponible à l'atelier A2. La contrainte associée à t_2 est dite saturée.
- Les valeurs des variables dans la Base (B) se lisent dans la colonne C: $t_1 = 70$ et $x_1 = 30$. Cela signifie qu'on fabrique 30 pièces P1 et qu'il reste 70 heures d'utilisation disponible à l'atelier A1.
- La dernière cellule (intersection de C etΔ) donne la valeur de -z : -z = -36000 donc z = 36000. Cela signifie que la marge est égale à 36000 F.
- La ligne Δ donne les valeurs marginales ou taux marginal de substitution; elles s'interprètent de la manière suivante: à ce stade de la solution, une augmentation de 1 unité de x_2 ferait croître la fonction objectif de 400, et une augmentation de 1 unité de t_2 ferait diminuer la fonction objectif de 200 (il est à noter qu'une augmentation de 1 unité de la variable d'écart t_2 revient à diminuer le second membre de l'équation correspondante de 1 unité).Cela signifie qu'à ce stade de la production si on augmente la production de 1 pièce de P2, la marge va augmenter de 400 F et si on diminue la disponibilité de 1 heure à l'atelier A2, la marge va diminuer de 200 F.

En effet, la solution actuelle est $x_1= 30$; $x_2 = 0$; $t_1 = 70$; $t_2 =0$
et $z =1200 .x_1+ 1000 . x_2 + 0 .t_1 + 0 . t_2 = 1200 . 30+ 1000 . 0+ 0 . 70 + 0 . 0 = 36000$
Si on augmente $x_1$de 1 unité, on ne peut garder $x_1= 30$ car la 2° contrainte $6 x_1 + 3 x_2 + 0 t_1+ 1 t_2= 180$ est saturée. On doit donc déterminer la valeur de x_1 permettant d'augmenter x_2 de 1 unité:
$6 .x_1 + 3 . 1 + 0 . 70 + 1 . 0 = 180 \Leftrightarrow 6 x_1 + 3 = 180 \Leftrightarrow x_1 = 29{,}5$
d'où $z =1200 . 29{,}5+ 1000 . 1+ 0 . 70 + 0 . 0 = 36400$, c.à.d. une augmentation de 400 F par rapport à la solution précédente.
Si on augmente $t_2$de 1 unité, la contrainte $6 x_1 + 3 x_2 + 0 t_1 + 1 t_2= 180$ devient $6 .x_1 + 3 .x_2 + 0 . 70 + 1 . 1 = 180$
ou encore $6 x_1 + 3 x_2= 179$; on a donc bien 1 heure de disponibilité en moins à l'atelier A2.
De plus puisque $x_2 = 0$, on aura $x_1 = 179/6$ au lieu de 30
d'où $z =1200 . 179/6+ 1000 . 1+ 0 . 70+ 0 . 1 = 35800$, ce qui correspond à une baisse de 200 F.

* Tableau 2:

HB B	x_1	x_2	t_1	t_2	C	R	
t_1	0	5/2	1	-1/2	70	28	variable sortant
x_1	1	1/2	0	1/6	30	60	
Δ	0	400	0	-200	- 36000		
		variable entrant					

d'où le tableau 2:

HB B	x_1	x_2	t_1	t_2	C
x_2	0	1	2/5	-1/5	28
x_1	1	0	-1/5	4/15	16
Δ	0	0	-160	-120	- 47200

Ce tableau nous donne la troisième solution admissible:
- Les variables Hors Base (HB) sont nulles: $t_1= 0$; $t_2 = 0$ (x_1 et x_2 en rouge ne sont pas hors base; elles ne sont présentes que pour rappeler qu'il s'agit des colonnes des coefficients de ces deux variables). Cela signifie qu'il reste 0 heure d'utilisation

disponible aux ateliers A1 et A2. Les contraintes associées à t_1 et t_2 sont saturées.
- Les valeurs des variables dans la Base (B) se lisent dans la colonne C: $x_2 = 28$ et $x_1 = 16$. Cela signifie qu'on fabrique 16 pièces P1 et 28 pièces P2.
- La dernière cellule (intersection de C et Δ) donne la valeur de -z : -z = - 47200 donc z = 47200. Cela signifie que la marge est égale à 47200 F.

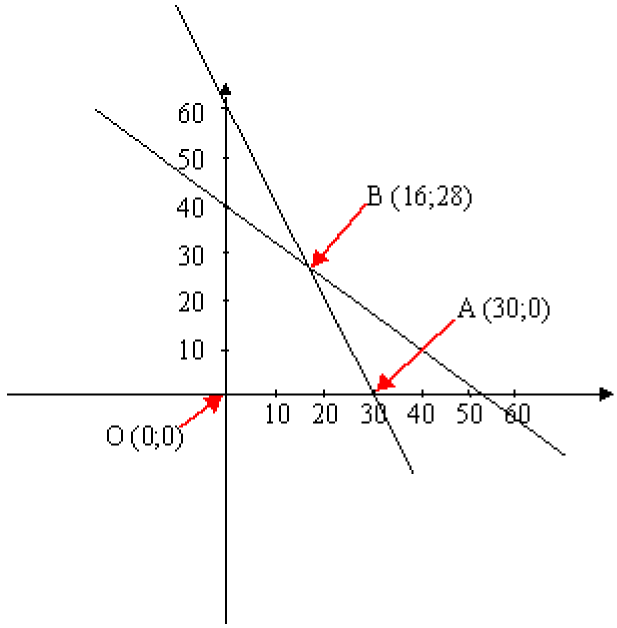
- La ligne Δ donne les valeurs marginales ou taux marginal de substitution; elles s'interprètent de la manière suivante: à ce stade de la solution, une augmentation de 1 unité de t_1 ferait diminuer la fonction objectif de 160, et une augmentation de 1 unité de t_2 ferait diminuer la fonction objectif de 120 (il est à noter qu'une augmentation de 1 unité d'une variable d'écart revient à diminuer le second membre de l'équation correspondante de 1 unité).

<u>Critère d'arrêt des itérations:</u>
Si tous les coefficients de la ligne Δ, relatifs aux variables HB, sont négatifs ou nuls, la solution trouvée est optimale.

Nous avons donc ici atteint la solution optimale.

<u>Remarques importantes:</u>
- S'il existe une variable HB ayant un coefficient positif dans la ligne Δ et telle que tous les coefficients correspondants dans le tableau soient nuls ou négatifs, alors la solution est infinie.
- Si, à la fin des itérations, une variable est HB avec un coefficient nul dans la ligne Δ, alors on a une arête (plan,...) optimale. Les autres sommets solutions sont obtenus en faisant rentrer cette variable dans la base.

<u>Interprétation graphique de la méthode du simplexe:</u>
Les différentes solutions obtenues à chaque tableau correspondent respectivement aux sommets O ($\mathbf{x}_1 = 0$; $\mathbf{x}_2 = 0$), A ($\mathbf{x}_1 = 30$; $\mathbf{x}_2 = 0$), B ($\mathbf{x}_1 = 16$; $\mathbf{x}_2 = 28$) du graphique. On a cheminé sur le pourtour du polyèdre des solutions admissibles, en sélectionnant parmi tous les sommets possibles celui donnant la valeur maximale à la fonction objectif.



2) DUAL

A tout programme linéaire appelé PRIMAL correspond un programme linéaire appelé DUAL obtenu de la manière suivante:

PRIMAL	DUAL
m contraintes d'infériorité n variables d'activité m variables d'écart écriture en ligne	n contraintes de supériorité n variables d'écart m variables d'activité écriture en colonne

exemple

PRIMAL	DUAL
$3x_1 + 4x_2 \leq 160$ $6x_1 + 3x_2 \leq 180$ $\text{Max } z = 1200x_1 + 1000x_2$ $x_1 \geq 0 \; ; \; x_2 \geq 0$	$3y_1 + 6y_2 \geq 1200$ $4y_1 + 3y_2 \geq 1000$ $\text{Min } w = 160y_1 + 80y_2$ $y_1 \geq 0 \; ; \; y_2 \geq 0$

A l'optimum, le primal et le dual sont liés par les règles suivantes:
- les fonctions objectifs z et w ont la même valeur optimale
- la valeur marginale d'une variable dans un programme est égale à l'opposé de la valeur optimale de la variable associée dans l'autre programme et réciproquement.

exemple

PRIMAL	$z = 47200$	x_1	x_2	t_1	t_2
	valeurs optimales	16	28	0	0
	valeurs marginales	0	0	-160	-120

DUAL	w = 47200	u_1	u_2	y_1	y_2
	valeurs optimales	0	0	160	120
	valeurs marginales	-16	-28	0	0

Noter qu'aux 2 variables d'activité $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$ du Primal sont associées 2 contraintes et donc 2 variables d'écart $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ dans le Dual. De même aux 2 contraintes du Primal auxquelles correspondent 2 variables d'écart $\mathbf{t}_1$ et $\mathbf{t}_2$, sont associées 2 variables d'activité $\mathbf{y}_1$ et $\mathbf{y}_2$ dans le Dual.

Le programme dual peut quelque fois apporter des interprétations économiques intéressantes. D'un point de vue mathématique, il peut permettre de résoudre certains problèmes de minimisation.