ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE.

I. L'équation de propagation dans le vide sans charges ni courants.

1°) Mise en équations.

Dans le vide en l'absence de charges et de courants, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\boxed{\begin{cases} div(\vec{E}) = 0 & div(\vec{B}) = 0 \\ \overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}}$$

On établit (en utilisant $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{X})) = \overrightarrow{grad}(div(\vec{X})) - \vec{\Delta}(\vec{X})$) que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ satisfont à l'équation de propagation ou **équation de D'Alembert vectorielle**:

$$\boxed{\Delta(\vec{E}) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \ \ et \ \Delta(\vec{B}) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}.$$

- **Dimension et interprétation du produit $\varepsilon_0 \mu_0$.**

Il découle de l'équation de propagation que la quantité $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}}$ est **homogène à une vitesse**.

Cette vitesse est notée c et représente la ***vitesse de propagation*** (ou ***célérité***) du champ électromagnétique dans le vide. Retenons la relation $\boxed{\varepsilon_0 \mu_0 \ c^2 = 1}$.

2°) Les solutions de l'équation des ondes.

- **Rappels sur l'équation de d'Alembert à une dimension.**

Considérons la fonction scalaire $s(x,t)$ qui vérifie **l'équation des ondes à une dimension**:

$$\boxed{\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0}$$, où v est une constante positive.

La solution générale de l'équation des ondes à une dimension s'écrit :

$$\boxed{s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) + g\left(t + \frac{x}{v}\right)},$$

où f et g sont des fonctions au moins de classe $\mathscr{C}^2$ à priori arbitraires .

Le groupement en $t - x / v$ dans f signifie que la grandeur f se propage sans déformation, à la **célérité v** le long de Ox, dans la direction des **x positifs** (si $v > 0$).

La fonction g de la variable $t + x / v$ a la même signification au signe près devant x et représente par conséquent une propagation sans déformation dans la direction des x négatifs.

À un instant t donné, la valeur de f est constante dans tout plan $x = Cste$.

On dit que f (ou g) décrit une **onde plane progressive** (*O.P.P.*) se propageant suivant Ox vers les x croissants (ou x décroissants).

La quantité $\boxed{t \mp \dfrac{x}{v}}$ représente la **phase** de l'onde à l'instant t.

- **Cas d'un problème à symétrie sphérique.**

La fonction s(M, t) cherchée ne dépend que du temps et de la distance $r = OM$.

Le laplacien s'écrit alors en coordonnées sphériques $\boxed{\Delta(s) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{\partial s}{\partial r}\right)}$.

En effectuant le changement de variable $\boxed{\Phi = r.s}$, on établit $\boxed{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0}$.

On reconnaît l'équation des ondes à une dimension étudiée précédemment.

La solution générale de l'équation de d'Alembert pour un problème à symétrie sphérique s'écrit $\boxed{s(r,t) = \frac{1}{r}s_+(t - \frac{r}{c}) + \frac{1}{r}s\_(t + \frac{r}{c})}$.

Comme il a été déjà vu, les fonctions s_+ et s_- sont arbitraires, déterminées par les conditions aux limites, représentant respectivement deux ondes sphériques divergente et convergente par rapport à l'origine *O*.

c) Cas d'une propagation suivant une direction fixe.

On désigne par *Ou* une direction spatiale fixe définie par le vecteur unitaire $\vec{e}_u$, de cosinus directeurs (α, β, γ) : $\vec{e}_u = \alpha\vec{e}_x + \beta\vec{e}_y + \gamma\vec{e}_z$, avec $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

Un point *M* quelconque est repéré par son rayon vecteur $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$.

On note $u = \vec{e}_u.\vec{r} = \alpha x + \beta y + \gamma z$ (*u* est l'abscisse de la projection *H* du point *M* sur l'axe *Ou*).

On dit que *f(x, y, z, t)*, solution de l'équation de d'Alembert à trois dimensions, décrit une ***onde plane progressive*** (***O.P.P.***) se propageant suivant la direction *Ou* si, à t donné, f(x,y,z,t) ***ne dépend que de u, avec*** $\boxed{u = \vec{e}_u.\vec{r}}$.

Les surfaces d'onde de l'onde plane sont les ***plans perpendiculaires à Ou***.

Inversement, si *f(x,y,z,t)* représente une onde se propageant dans la direction *Ou* et si, à t donné, *f(x,y,z,t)* ***n'a pas la même valeur*** en tout point d'un plan perpendiculaire à *Ou*, c'est que l'onde ainsi décrite ***n'est pas plane***.

L'équation de d'Alembert étant invariante par changement de base, on peut tout à fait choisir l'axe *Ox* pour la direction *Ou*. Ainsi : $u = \vec{e}_x.\vec{r}$.

La solution ainsi cherchée sous forme d'onde plane progressive est du type $f\left(t - \frac{\vec{r}.\vec{e}_x}{c}\right)$.

Notons maintenant simplement $\vec{e}_u$ le vecteur unitaire dans la direction *Ou,* sans chercher à particulariser l'axe des *x*.

Une ***onde plane progressive*** (***O.P.P.***) se propageant suivant la direction *Ou,* solution de l'équation de d'Alembert à trois dimensions $\boxed{\Delta(f) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0}$, s'écrit sous la forme générale $\boxed{f\left(t - \frac{\vec{r}.\vec{e}_u}{c}\right)}$. ($\vec{e}_u$ unitaire dans la direction *Ou*).

Les ***surfaces d'ondes*** de l'O.P.P. sont des ***plans perpendiculaires à la direction définie par le vecteur*** $\vec{e}_u$.

d) Généralisation.

Nous admettrons que ***toute solution*** de l'équation de d'Alembert est une superposition d'ondes planes progressives, dont les directions de propagation *Ou* couvrent tout l'espace.

⚠ ***Une superposition donnée d'ondes planes progressives ne conduit pas forcément à une onde résultante, ni plane, ni progressive (contre exemple : les ondes stationnaires ou les ondes guidées).***

➢ **Structure de l'O.P.P.**

Une onde plane progressive, dans le sens défini par le vecteur unitaire $\vec{e}_u$ est caractérisée par des vecteurs champ électrique et champ magnétique qui ne dépendent que de la variable $\boxed{t - \dfrac{\vec{r}.\vec{e}_u}{c}}$.

Une O.P.P. se propageant dans le vide suivant $\vec{e}_u$ vérifie

$\boxed{\vec{E}.\vec{e}_u = 0}$ $\boxed{\vec{B}.\vec{e}_u = 0}$ $\boxed{\vec{B} = \dfrac{1}{c}\vec{e}_u \wedge \vec{E}}$ ou $\boxed{\vec{E} = c\vec{B} \wedge \vec{e}_u}$.

En particulier, on remarque que $\boxed{\vec{e}_u, \vec{E}, \vec{B} \quad \text{forme un trièdre direct.}}$.

Les ondes électromagnétiques planes progressives sont des **ondes transversales** (i.e. $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires à la direction de propagation).

3°) Impédance du vide.

On montre à l'aide de l'analyse dimensionnelle que le rapport $\boxed{\dfrac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{B}\| / \mu_0}}$ est homogène à une impédance, appelée ***impédance d'onde***.

Pour une O.P.P. se propageant dans le vide, on établit que l'impédance d'onde (ou impédance du vide) s'écrit $\boxed{Z_{vide} = \mu_0 c = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}$ A.N. $\boxed{Z_{vide} = 377\ \Omega}$.

II. L'onde plane progressive harmonique (ou monochromatique).

1°) Définition et expression.

Une solution particulière de l'équation de propagation est l'onde plane **dépendant sinusoïdalement du temps**, appelée *Onde Plane Progressive Harmonique* (ou ***sinusoïdale***, ou ***monochromatique***), en abrégé **O.P.P.H. (ou O.P.P.M.).** Considérons une O.P.P.H. se propageant suivant l'axe $x'x$, vers les x positifs.

Le champ électrique est de la forme $\boxed{\vec{E} = \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y}\cos\left[\omega(t - x/c) + \phi_2\right] \\ E_z = E_{0z}\cos\left[\omega(t - x/c) + \phi_3\right] \end{cases}}$,

où les amplitudes E_{0y} et E_{0z} ainsi que les phases ϕ_2 et ϕ_3 sont des constantes.

Le terme en $\underline{\omega\left(t - \dfrac{x}{c}\right) + \phi_{2,3}}$ définit ***la phase*** de l'onde plane progressive harmonique.

Une O.P.P.H. se propageant à la **célérité c** dans le sens du vecteur unitaire $\vec{e}_u$ est caractérisée par :

- sa **fréquence** (temporelle) ν ou sa **pulsation** (temporelle) $\boxed{\omega = 2\pi\nu}$.
- sa **longueur d'onde** $\boxed{\lambda = cT = \dfrac{c}{\nu}}$ ou son **nombre d'onde** $\boxed{\sigma = \dfrac{1}{\lambda}}$.

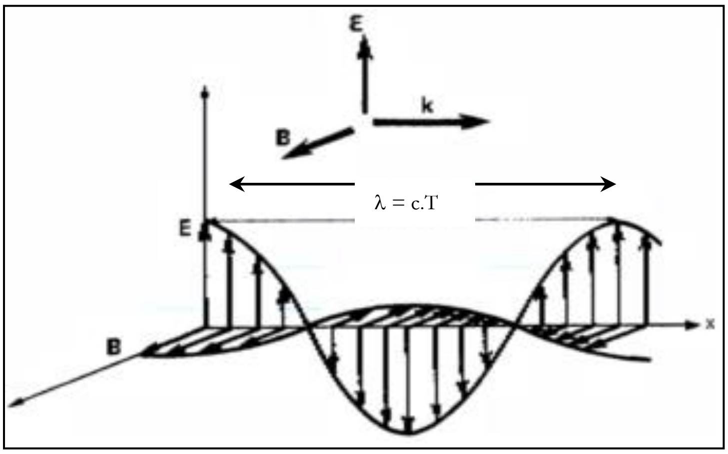
son **vecteur d'onde** $\boxed{\vec{k} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\vec{e}_u = \dfrac{\omega}{c}\vec{e}_u}$.

Une *O.P.P.H.* présente une **double périodicité**, **temporelle** de période T et **spatiale** de période λ.

☞ Les relations établies dans le § précédent pour les *O.P.P.* sont bien sûr valables pour les *O.P.P.H.* qui n'en sont qu'un cas particulier.

Ainsi pour une *O.P.P.H.* :

- Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont **transverses**.
- Le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est **direct**.
- On peut écrire $\boxed{\vec{B} = \frac{1}{\omega}\vec{k} \wedge \vec{E}}$.
- Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ***vibrent en phase***.



- **Vitesse de phase.**

Les points tels que la phase ωt - $\vec{k}.\vec{r} + \varphi$ est **constante** définissent à chaque instant t un plan **perpendiculaire** à la direction de propagation définie par le vecteur d'onde $\vec{k}$, et appelé **plan équiphase ou plan d'onde**.

On en déduit que les plans équiphases se déplacent avec une vitesse appelée **vitesse de phase**, définie par $\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k}}$.

Dans le vide, on a $\boxed{\omega = k.c}$; la vitesse de phase est donc **constante**, **indépendante** de la fréquence de l'onde et $\boxed{v_\varphi = c}$.

2°) Notation complexe d'une O.P.P.H.

Si on associe à toute composante réelle *f* du champ ou du potentiel la quantité complexe $\boxed{\underline{f} = \underline{f_m} \exp\left[j\ (\omega t - \vec{k}.\vec{r}\ )\right]}$, les opérateurs différentiels se ramènent, en coordonnées cartésiennes, aux transformations algébriques suivantes

$\boxed{\frac{\partial X}{\partial t} \leftrightarrow j\omega X}$, $\boxed{div\vec{X} \leftrightarrow -j\vec{k}.\vec{X}}$, $\boxed{\overrightarrow{rot}\vec{X} \leftrightarrow -j\vec{k} \wedge \vec{X}}$, $\boxed{\Delta X \leftrightarrow -k^2 X}$

Relation de dispersion.

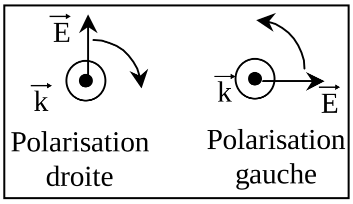
Le modèle de l'O.P.P.H. dans le vide conduit à la ***relation de dispersion*** : $\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$, qui montre que le vide se comporte comme un milieu non dispersif et non absorbant (!).

Ainsi, dans le vide, les vitesse de phase et de groupe sont identiques *(= c)*.

3°) Polarisation d'une O.P.P.H.

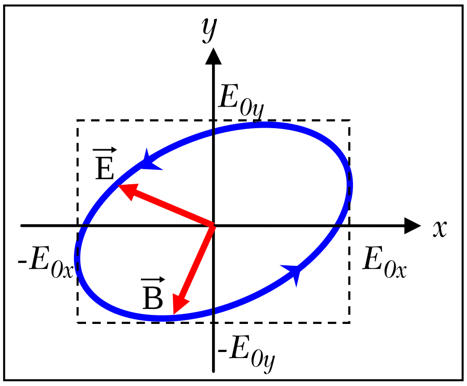
La **polarisation** d'une *O.P.P.H.* est définie à partir de son vecteur $\vec{E}$, comme la nature de la courbe décrite par l'extrémité de $\vec{E}$ dans un plan d'onde.

Par convention, **le sens de rotation (gauche ou droite) est défini pour un observateur qui reçoit l'onde**.



Soit une *O.P.P.H.* se propageant suivant l'axe *z'z*, vers les *z* positifs. Moyennant un choix convenable de l'origine des dates, on peut toujours écrire le champ $\vec{E}$ sous la forme :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = E_{0x}\cos(\omega t - kz) \\ E_y = E_{0y}\cos(\omega t - kz - \varphi) \\ E_z = 0 \end{cases}.$$



Dans le plan *z = 0*, l'extrémité de $\vec{E}$ décrit la courbe d'équations

$$\begin{cases} E_x = E_{0x}\cos(\omega t) \\ E_y = E_{0y}\cos(\omega t - \varphi) \end{cases}.$$

En éliminant le temps entre E_x et E_y, on obtient la relation :

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\cos\phi + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = \sin^2\phi\,.$$

On reconnaît l'équation d'une ellipse, le sens de parcours dépendant du signe de *sin(φ)*.

Ainsi, dans le cas le plus général, une *O.P.P.H.* est **polarisée elliptiquement**.

➢ Valeurs particulières du déphasage.

- $\boxed{Si\ \varphi = 0 \text{ ou } \varphi = \pi}$. $E_y / E_x = Cste$ et $\vec{E}$ **garde une direction fixe au cours du temps**.

L'O.P.P.H. est dite polarisée **rectilignement**.

- $\boxed{Si\ \varphi = \pm\dfrac{\pi}{2} \text{ et si } E_{0x} = E_{0y}}$. $E_X^2 + E_Y^2 = Cste$: c'est **l'équation d'un cercle**.

L'O.P.P.H. est dite polarisée **circulairement** (on distingue la polarisation circulaire **gauche** et la polarisation circulaire **droite** selon la valeur de *φ*) .

➢ Importance de la polarisation rectiligne.

☞ Une *O.P.P.H.* de polarisation *elliptique quelconque* peut toujours s'écrire comme la superposition de deux *O.P.P.H.* polarisées *rectilignement* suivant *deux directions orthogonales*.

L'O.P.P.H.R forme ainsi la « brique » élémentaire de la théorie des ondes électromagnétiques.

☞ On a de même que toute *O.P.P.H.R.* s'écrit comme la superposition de deux *O.P.P.H.* polarisées *circulairement*, *droite* (*O.P.P.H.C$_d$*) et *gauche* (*O.P.P.H.C$_g$*) de *même amplitude*.

III. Étude énergétique des O.E.M. planes dans le vide.

1°) Aspect énergétique d'une *O.P.P.*

L'énergie électromagnétique volumique, définie par l'expression $\varpi = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0\left\|\vec{E}\right\|^2 + \dfrac{1}{2\mu_0}\left\|\vec{B}\right\|^2$,

s'écrit pour une *O.P.P.* $\boxed{\varpi_{OPP} = \varepsilon_0 E^2 = \dfrac{1}{\mu_0}B^2}$ (conséquence de $B = E / c$).

➢ Le problème du calcul du vecteur de Poynting.

Le vecteur de Poynting n'étant **pas linéaire** vis-à-vis du champ électromagnétique, il faut le déterminer **à partir des expressions réelles** de $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

Pour une *O.P.P.* le **vecteur de Poynting** peut s'exprimer en fonction du seul champ électrique (ou du seul champ magnétique) selon :

$\boxed{\vec{\Pi}_{OPP} = \varepsilon_0 c E^2 \vec{e}_u = \dfrac{c}{\mu_0} B^2 \vec{e}_u}$, ou avec l'énergie volumique ϖ : $\boxed{\vec{\Pi}_{OPP} = c\varpi_{OPP}\ \vec{e}_u}$.

2°) Vitesse de propagation de l'énergie dans le vide.

On établit que l'énergie d'une *O.P.P.* dans le vide suivant la direction et le sens défini par $\vec{e}_u$ se propage à la ***célérité c***.

Démonstration :

Considérons une *O.P.P.* se propageant dans le vide dans la direction de l'axe Oz, suivant les z croissants. On note v_e la vitesse de propagation de l'énergie associée à cette onde.

L'énergie qui traverse, entre les dates t et $t + dt$, une section de surface S perpendiculaire à Oz s'écrit aussi en fonction du vecteur de Poynting : $d\mathscr{E} = \vec{\Pi} \cdot \vec{e}_z S.dt$.

Cette énergie a parcouru entre les dates t et $t + dt$ la distance $dz = v_e.dt$.

Une tranche d'épaisseur dz, de surface S perpendiculaire à dz contient l'énergie : $d\mathscr{E} = \varpi S dz$.

Compte tenu de la relation entre $\vec{\Pi}$ et ϖ pour une *O.P.P.*, on obtient $\boxed{v_e = \dfrac{\Pi}{\varpi} = c}$.

3°) Éclairement et intensité.

Du point de vue de la réception :

On définit **l'éclairement** $\mathcal{E}_c$ d'une OPP comme l'énergie électromagnétique moyenne qui traverse par unité de temps une surface unité perpendiculaire à la direction de propagation $\boxed{\mathcal{E}_c = \left\langle \left\| \vec{\Pi}(t) \right\| \right\rangle_{temp}}$.

L'éclairement s'exprime en ***W.m***$^{-2}$ ou en ***lux*** pour les ondes lumineuses.

Du point de vue de l'émission :

On appelle **intensité énergétique** $\mathscr{I}$ d'une source dans une direction donnée, le flux rayonné par unité d'angle solide suivant cette direction $\boxed{\mathscr{I} = \dfrac{d\Phi}{d\Omega}}$. ($\mathscr{I}$ est en ***W/sr*** et en ***candela*** pour une onde lumineuse).

Par ailleurs, on définit en optique ***l'intensité I d'une onde lumineuse***, proportionnelle à l'éclairement par : $\boxed{I = < \left\| \vec{E}^2 \right\| >_{temp}}$.