

ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS UN DIÉLECTRIQUE (1).

I. Charges et courants liés dans un milieu diélectrique.

1°) Définitions et notations.

➤ Distinction milieu conducteur – milieu isolant.

Les *milieux isolants*, encore appelées **diélectriques**, diffèrent des *conducteurs* parce qu'on n'y trouve pas de charges libres, mobiles dans tout le milieu sous l'action d'un champ électrique.

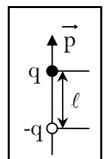
Dans les diélectriques, toutes les charges sont liées : les seuls mouvements possibles en présence d'un champ électrique sont de minuscules déplacements, en général petits par rapport aux dimensions atomiques.

➤ Polarisation des diélectriques.

Un diélectrique dans lequel a lieu un déplacement de charges liées est dit **polarisé** et ses molécules ont un **moment dipolaire induit**. Ces dipôles créent leurs propres champs, qui s'ajoutent à ceux créés par d'éventuelles charges extérieures, le champ des dipôles et le champ extérieur appliqué pouvant être alors d'amplitudes comparables.

➤ Moment dipolaire (électrique).

On appelle dipôle électrique l'ensemble formé de deux charges ponctuelles opposées $q > 0$ placée en P et $-q < 0$ placée en N , dont la dimension $\ell = NP$ est supposée petite devant les autres dimensions mises en jeu.



On appelle **moment dipolaire** (électrique) le vecteur : $\vec{z} = qNP$.

➤ Vecteur polarisation.

Dans un milieu matériel, on appelle **vecteur polarisation** et on note \vec{P} le moment dipolaire moyen par unité de volume.

\vec{P} est une *grandeur macroscopique nivelée*, la moyenne étant faite à *l'échelle mésoscopique* (typiquement sur un volume de $(0,1 \mu\text{m})^3$).

En raisonnant sur un volume mésoscopique $d\tau$ centré sur un point M , on caractérise l'état du milieu en M par son moment dipolaire : $d\vec{z} = \vec{P} \cdot d\tau$.

La *polarisation* est homogène à une **densité superficielle de charges** et se mesure donc en u.s.i. en C/m^2 .

➤ Les différents mécanismes de polarisation.

On distingue quatre mécanismes de polarisation pour rendre compte des phénomènes observés dans les milieux matériels :

1. **Polarisation électronique** : elle est liée à la modification de la répartition des charges *internes* à chaque atome ou ion. Elle est toujours présente quel que soit l'état du matériau considéré.
2. **Polarisation atomique ou ionique** : elle concerne les déplacements des atomes ou des ions par rapport à leurs positions d'équilibre dans l'édifice auquel ils appartiennent.
3. **Polarisation d'orientation** : elle concerne l'orientation de moments dipolaires rigides (atomique ou moléculaire) sous l'action d'un champ électrique.
4. **Polarisation par déplacement macroscopique** : elle concerne les déplacements à l'échelle du matériau sous l'action d'un champ électrique stationnaire. C'est le cas de la polarisation des conducteurs ou d'une jonction $p - n$ par exemple.

2°) Vecteur densité de courant de polarisation (courants liés).

Considérons un élément de volume $d\tau_M$ autour d'un point M contenant des porteurs de charges microscopiques. Un porteur est repéré par sa position P_k , sa charge q_k et sa vitesse \vec{v}_k .

Le moment dipolaire électrique de ce volume $d\tau_M$ s'écrit $d\vec{p} = \sum q_k \overrightarrow{MP_k} = \vec{P}(M)d\tau_M$, où $\vec{P}(M)$ est le vecteur polarisation en M .

En regroupant entre eux les porteurs qui portent la même charge q_i , de densité volumique de charge $\rho_i = q_i n_i$, où $n_i = \frac{dN_i}{d\tau_M}$ représente le nombre de porteurs par unité de volume, on a :

$$\vec{P}(M) = \sum \rho_i \overrightarrow{MP_i}. \quad \text{On en déduit } \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \sum \rho_i \frac{\partial \overrightarrow{MP_i}}{\partial t} = \sum \rho_i \vec{v}_i.$$

On retient :

L'existence dans un diélectrique d'une polarisation \vec{P} fait apparaître des **courants de polarisation**, caractérisés par leur densité volumique, notée $\vec{j}_{pol} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$.

Cette densité de courants de polarisation, est comme \vec{P} une grandeur macroscopique, correspondant à la moyenne des courants microscopiques produits par les faibles déplacements relatifs des charges liées.

3°) Densité de charges de polarisation (charges liées).

Le principe de conservation de la charge électrique s'écrit sous forme locale $div(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. En l'appliquant aux charges de polarisation, il vient $div\left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow div(\vec{P}) + \rho_{pol} = C^{te} / temps$.

En l'absence d'un champ extérieur appliqué, les barycentres des charges \oplus et \ominus sont confondus : il n'apparaît donc pas de charges de polarisation et on a $\vec{P} = \vec{0}$ pour $\rho_{pol} = 0$. Ainsi $C^{te} = 0$

On retient :

L'étude macroscopique d'un milieu diélectrique de polarisation \vec{P} (à priori inconnue) est **équivalente** à une distribution macroscopique de charges, dites **« charges de polarisation »**, ou **« charges liées »** ou « charges structurales » caractérisées par une densité volumique de charges de polarisation $\rho_{pol} = -div(\vec{P})$.

Remarque :

Une description complète des phénomènes de polarisation montre qu'il convient d'ajouter à cette répartition volumique de charges de polarisation une **densité superficielle de charges** définie par la relation $\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \vec{n}_{ext}$, où \vec{n}_{ext} est le vecteur unitaire normal dirigé vers l'extérieur du diélectrique.

Ces résultats s'obtiennent en exprimant que le potentiel électrique dû aux charges liées, créé en un point M à l'extérieur du diélectrique, s'écrit comme la somme de celui dû aux répartitions volumique ρ_{pol} et surfacique σ_{pol} .

$$V(M \notin \text{diélectrique}) = \iint_{\Sigma} \frac{\vec{P} \cdot \vec{n}_{ext} dS}{4\pi\epsilon_0 r} + \iiint_{\mathcal{V}} \frac{-div(\vec{P}) d\tau}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

(relation H-P).

II. Ondes électromagnétiques dans un diélectrique homogène et isotrope.

1°) Caractéristiques d'un diélectrique linéaire, homogène et isotrope (ou D.L.H.I.).

➤ Définition d'un milieu linéaire.

Un milieu diélectrique est dit linéaire si les composantes de \vec{E} et \vec{P} sont liées par des relations tensorielles du type

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{e_{xx}} & \chi_{e_{xy}} & \chi_{e_{xz}} \\ \chi_{e_{yx}} & \chi_{e_{yy}} & \chi_{e_{yz}} \\ \chi_{e_{zx}} & \chi_{e_{zy}} & \chi_{e_{zz}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \text{ soit sous forme condensée : } \boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 [\chi_e] \vec{E}}, \text{ où}$$

$[\chi_e]$ est appelé **tenseur de susceptibilité électrique**.

Remarque :

Lorsque le champ \vec{E} varie sinusoïdalement dans le temps on adopte en général la notation complexe. Les relations matricielles précédentes restent valables, les coefficients $\chi_{e_{ij}}$ étant à priori complexes et dépendant de la fréquence du champ.

➤ Les milieux linéaires et isotropes.

Un milieu est linéaire et isotrope si le tenseur se réduit à un **scalaire** (absence de directions privilégiées), c'est-à-dire s'il existe en chaque point M une constante appelée susceptibilité électrique complexe χ_e telle que : $\boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e(\omega) \vec{E}}$.

➤ Les milieux linéaires, homogènes et isotropes.

Enfin, le milieu est dit *linéaire*, *homogène* et *isotrope* (en abrégé L.H.I.) si en outre χ_e ne dépend pas du point M : il s'agit alors d'une constante caractéristique du milieu.

Dans un D.L.H.I. on a $\boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}}$, χ_e est un nombre **toujours positif** (la polarisation a toujours le même sens que le champ \vec{E}).

2°) Les équations de Maxwell dans un milieu non magnétique.

Les équations de Maxwell dans un milieu diélectrique s'écrivent en fonction des seules sources extérieures au milieu (on parle alors de sources libres) en introduisant le champ supplémentaire :

- Vecteur **déplacement électrique** \vec{D} : $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$, où \vec{P} est la polarisation du milieu.

$$\text{éq}^n \text{ de M-G : } \text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho_{\text{libres}} + \rho_{\text{pol}}}{\varepsilon_0}, \text{ soit } \text{div}(\varepsilon_0 \vec{E}) = \rho_{\text{libres}} - \text{div}(\vec{P}).$$

$$\text{éq}^n \text{ de M-A : } \overrightarrow{\text{rot}}(B) = \mu_0 \left(\vec{j}_{\text{cond}} + \vec{j}_{\text{pol}} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), \text{ soit : } \overrightarrow{\text{rot}}(B) = \mu_0 \left(\vec{j}_{\text{cond}} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

Les équations de Maxwell s'écrivent ainsi $\left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\vec{B}) = 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\vec{D}) = \rho_{\text{libres}} \\ \overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) = \vec{j}_{\text{libres}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$

➤ Les relations de passage du champ électromagnétique entre deux milieux non magnétiques.

Par analogie avec ce qui a été vu lors de l'électromagnétisme du vide et compte tenu des équations de

Maxwell dans les milieux, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{D}_{2N} - \vec{D}_{1N} = \sigma_{\text{libres}} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{E}_{2T} = \vec{E}_{1T} \\ \vec{B}_{2N} = \vec{B}_{1N} \\ \vec{B}_{2T} - \vec{B}_{1T} = \mu_0 \vec{j}_{s, \text{libres}} \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \end{array} \right.$$

 À la traversée de deux milieux matériels, il y a toujours **continuité** de la composante **tangentielle pour \vec{E}** et de la composante **normale pour \vec{B}** .

➤ **Les relations de passage du champ électromagnétique entre deux D.L.H.I. non chargés et non magnétiques.**

On a de plus ici : $\rho_{libre} = 0 \Rightarrow \sigma_{libre} = 0$. Par ailleurs, dans un diélectrique (**isolant**) : $\vec{j}_{libre} = \vec{0}$.

À l'interface de deux **D.L.H.I. non chargés et non magnétiques**, il y a :

- continuité de la **composante tangentielle** de \vec{E} ,
- continuité de la **composante normale** de \vec{D} ,
- **continuité de \vec{B}** (composantes tangentielle et normale).

➤ **Cas d'un diélectrique linéaire, homogène et isotrope.**

Considérons un milieu polarisable, linéaire, homogène et isotrope, noté en abrégé **d.l.h.i.**

On a $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, avec $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$. D'où $\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$.

Un d.l.h.i. est caractérisé par une constante sans dimension, pouvant être complexe, appelée **permittivité relative complexe ϵ_r** , telle que $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$, avec $\epsilon_r = 1 + \chi_e$.

On étudie la possibilité d'existence d'une onde électromagnétique dans un **d.l.h.i., non chargé** (l'isolant ne contient donc que des charges et courants liés).

Les équations de Maxwell dans un **d.l.h.i. isolant, non chargé** s'écrivent en représentation complexe :

$$\text{div}(\vec{E}) = 0 \quad \text{div}(\vec{B}) = 0 \quad \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{rot}(\vec{B}) = \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

 On observe qu'on obtient les mêmes équations que dans le vide, **en remplaçant ϵ_0 par le produit $\epsilon_0 \epsilon_r$** .

Il faut prendre garde au fait que la permittivité relative complexe ϵ_r est définie pour la pulsation ω de **l'onde monochromatique** étudiée.

3°) Équation de propagation dans un d.l.h.i. non chargé.

En prenant le rotationnel du rotationnel de \vec{E} ou de \vec{B} , on aboutit aux équations de propagation en

représentation complexe : $\vec{\Delta}(\vec{E}) - \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ et $\vec{\Delta}(\vec{B}) - \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$.

➤ **Relation de dispersion, indice du milieu.**

Considérons une O.P.P.H. de pulsation ω et de vecteur d'onde (à priori complexe) $\vec{k} = \underline{k} \vec{u}$.

L'équation de propagation conduit à la relation de dispersion $\underline{k}^2 = \epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2}$.

1. **Cas où ϵ_r est un réel positif, noté ϵ_r** . La relation de dispersion $\Rightarrow \underline{k}$ réel, avec $k = \pm \sqrt{\epsilon_r} \frac{\omega}{c}$.

Cette expression montre que l'O.P.P.H. se propage dans le milieu à la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{|k|} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$, de la forme $v_\varphi = \frac{c}{n}$, en posant $n = \sqrt{\epsilon_r}$, où n s'identifie à **l'indice de réfraction** du milieu.

2. On généralise l'étude précédente pour $\underline{\varepsilon}_r$ **complexe** en posant $\underline{k} = \pm \underline{n} \frac{\omega}{c}$ où \underline{n} est **l'indice complexe** du milieu défini par $\underline{n}^2 = \underline{\varepsilon}_r$, et $\Re(\underline{n}) \geq 0$. Notons $k_0 = \frac{\omega}{c}$ le module du vecteur d'onde dans le vide.

En séparant les parties réelle et imaginaire de \underline{k} , avec $\underline{k} = k' + jk''$, on peut écrire \underline{n} sous la forme $\underline{n} = n' + jn''$, avec $n' = \frac{k'}{k_0} = \frac{c}{v_\varphi}$ et $n'' = \pm \frac{k''}{k_0}$.

On utilise aussi les notions de **longueur d'onde dans le vide** λ_0 et **longueur d'onde dans le milieu**

λ telles que $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ $k' = \frac{2\pi}{\lambda}$ soit $\lambda = \frac{\lambda_0}{n'}$.

III. Le modèle de l'électron élastiquement lié et permittivité associée.

1°) Le modèle microscopique.

- La plupart des gaz constitués de molécules non polaires se comportent comme des *d.l.b.i.* La polarisation induite prise par le milieu quand il est traversé par une *O.E.M.* peut s'interpréter grâce au modèle microscopique (dû au physicien Lorentz) dit de l'électron élastiquement lié :

Le champ d'une *O.E.M.* met en mouvement les charges liées du milieu où elle se propage. Si la réponse est **linéaire**, une onde monochromatique de pulsation ω force les oscillations de ces charges à la même pulsation ω .

- Dans le cadre de ce modèle, l'électron lié de masse m et de charge $q = -e$ est soumis à :
- une force de rappel élastique du type : $\vec{f}_r = -m\omega_0^2 \vec{r}$, où \vec{r} désigne le déplacement de la charge par rapport à sa position d'équilibre.
 - une force rendant compte des phénomènes dissipatifs d'énergie (collisions, rayonnement, ...) du type : $\vec{f}_{frt} = -m\Gamma \vec{v}$ (frottements fluides).
 - La force de Lorentz créée par le champ *EM* de l'onde. On peut montrer qu'il est légitime de négliger, dans l'approximation non relativiste, l'influence du terme magnétique. Le champ de l'onde est considéré comme uniforme à l'échelle de la molécule à la condition que $\lambda \gg \text{déplacement } r$. On peut alors écrire : $\vec{F}_L \simeq q\vec{E}$.

L'équation du mouvement d'un électron s'écrit : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -m\omega_0^2 \vec{r} - m\Gamma \vec{v} - e\vec{E}$.

La réponse en régime harmonique forcé de pulsation ω s'écrit en représentation complexe :

$$\vec{r} = -\frac{e}{m} \frac{\vec{E}_0 e^{j\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\Gamma\omega}$$

- Si on note N la densité volumique d'électrons liés (supposée uniforme), le **vecteur polarisation** du milieu s'écrit (en notation complexe) : $\vec{P} = -Ne\vec{r}$.

Le vecteur déplacement électrique s'écrit $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \left(1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\Gamma\omega} \right) \varepsilon_0 \vec{E}$.

On retient :

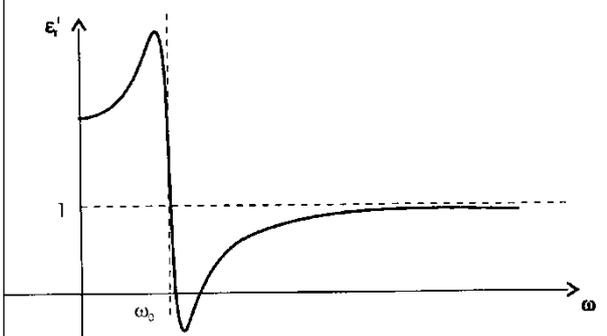
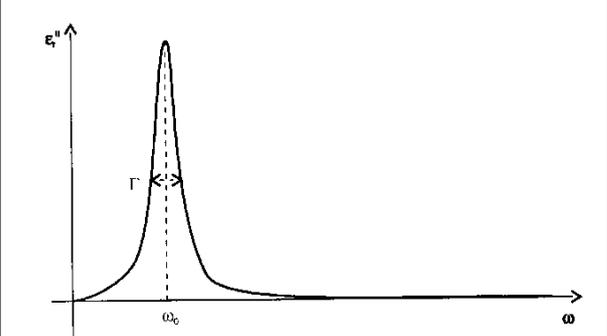
 Cette dernière expression montre comment le modèle de l'électron élastiquement lié permet de rendre compte du caractère linéaire, homogène et isotrope du milieu et donne une expression de la **permittivité relative complexe du milieu** :

$$\underline{\varepsilon}_r = 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\Gamma\omega}$$

2°) Dispersion, absorption, zone de transparence.

➤ En décomposant $\underline{\varepsilon}_r$ en ses parties réelle ε'_r et imaginaire ε''_r , on obtient :

$\varepsilon'_r = 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}$	$\varepsilon''_r = -\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{\Gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}$
<p>ε'_r intervient dans l'expression de la vitesse de phase de l'OEM dans le d.l.h.i. Sa dépendance plus ou moins forte avec la pulsation ω traduit la dispersion plus ou moins forte de ce milieu.</p>	<p>ε''_r intervient dans l'amortissement de l'OEM dans le d.l.h.i. Dans une zone d'absorption, la dispersion est très importante : le paquet d'onde est très déformé si bien que son amplitude peut ne plus être définie. En conséquence, la vitesse de groupe n'a plus de signification physique.</p>

Graphes des variations de ε'_r avec ω	Graphes des variations de $ \varepsilon''_r $ avec ω
	
<p>ε'_r passe par deux extrema pour des pulsations proches de la pulsation propre ω_0. En HF, $\varepsilon'_r \rightarrow 1$: les e⁻ du milieu ne peuvent plus suivre les oscillations du champ électrique et le milieu se comporte comme le vide.</p>	<p>Ce graphe fait apparaître un phénomène de résonance très aigu, de sorte que ε''_r ne prend de valeurs notables que dans un domaine de pulsations de largeur typique Γ au voisinage de la pulsation propre ω_0.</p>

Ces graphes rendent assez bien compte des résultats expérimentaux sous réserve d'admettre l'existence de plusieurs pulsations propres ω_0 , c'est-à-dire plusieurs types d'électrons liés.

Par exemple dans un atome, les électrons des couches plus profondes n'ont pas les mêmes caractéristiques que les électrons de valence.

Les pulsations caractéristiques de la polarisation électronique sont situées dans le domaine visible et l'ultraviolet.

Il faut aussi prendre en compte les déplacements des noyaux ou des ions d'un cristal ionique.

Les pulsations caractéristiques de la polarisation ionique ou atomique appartiennent au domaine infrarouge.

➤ Zone d'absorption.

À chacun de ces types d'oscillateurs correspond une zone d'absorption spécifique. Les largeurs Γ sont faibles en général (oscillateurs faiblement amortis) de sorte que les zones d'absorption correspondant aux polarisations électroniques et ioniques sont bien distinctes.

Par exemple, l'eau présente des zones d'absorption dans l'ultraviolet, dans l'infrarouge et dans le domaine des ondes centimétriques (on devrait plutôt dire millimétriques), ce qui est à la base du fonctionnement des fours à micro-ondes, qui échauffent l'eau contenue dans les aliments.

➤ **Zone de transparence.**

La courbe $\varepsilon'_r(\omega)$ fait apparaître deux zones de transparence (une bande supérieure et une bande inférieure), séparées par une **bande interdite**, quand $\varepsilon'_r < 0$, pour laquelle **la propagation n'est plus possible**.

En effet, dans ce cas le vecteur d'onde est purement imaginaire ($\varepsilon''_r \approx 0$) ce qui conduit à une onde atténuée sans propagation et sans absorption : **on parle d'onde évanescente**.

Dans une zone de transparence, la **dispersion** (appelée **dispersion normale**) et l'**absorption** sont **faibles**.

Dans le domaine des rayons X, $\varepsilon'_r \rightarrow 1$: l'onde se propage dans le milieu comme dans le vide ce qui explique que la plupart des milieux soient relativement transparents aux rayons X.

L'indice du milieu s'identifie alors à son indice de réfraction, avec $n \approx n' = \sqrt{\varepsilon'_r} \gg |\varepsilon''_r|$.

En notant $\chi_0 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0\omega_0^2}$ la **susceptibilité diélectrique statique**, on a $\varepsilon'_r \approx 1 + \chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$ en négligeant le terme d'amortissement. Ex : le verre l'eau et l'atmosphère sont transparents dans le visible.

➤ **Formule de Cauchy pour l'indice d'un verre.**

En ne prenant en compte que la polarisation électronique (les électrons jouent un rôle prépondérant en optique) et en considérant que ω_0 pour un verre donné se situe dans l'ultraviolet lointain, un DL de ε'_r conduit à : $n^2 = \varepsilon'_r \approx 1 + \chi_0 \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega^4}{\omega_0^4} + \dots \right)$, qui s'écrit en fonction de la longueur d'onde dans

le vide $\lambda = 2\pi c / \omega$: $n^2 \approx 1 + \chi_0 + \left(\frac{2\pi c}{\omega_0} \right)^2 \frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{2\pi c}{\omega_0} \right)^4 \frac{1}{\lambda^4} + \dots$.

L'indice du verre obéit à la relation approchée, qui s'avère souvent suffisante, dite formule de Cauchy : $n^2 \approx A + \frac{B}{\lambda^2}$.

➤ **Interprétation de la vitesse de groupe dans une zone de transparence.**

Dans une zone de transparence et dans le cas d'une dispersion faible, la **vitesse de groupe** d'un paquet d'ondes correspond à la **vitesse de propagation de l'énergie** associée à ce paquet d'onde. Cette vitesse de groupe est **toujours inférieure à c**.