République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Boudiaf
M'sila
Faculté de Technologies
Département de génie mécanique

Polycopie

Physique 4 : Mécanique rationnelle

Travaux dirigés

S3 LMD: ST

Ce polycopie est destiné aux étudiants du semestre 3 des sciences techniques du système LMD. Il contient des exercices résolus du module Physique 4. Les solutions sont souvent détaillées et permette à l'étudiant de compléter sa compréhension du cours et faire soit même son évaluation. Nous avons placé en tête de chaque TD un encadré dans lequel un petit rappel sur chaque chapitre.

Année universitaire 2013/2014

Sommaire

TD N°1: Rappel mathématique 2

Solution TD N°1 3

TD N°2: Statique 6

Solution TD N°2 8

TD N°3: Statique 16

Solution TD N°3 17

TD N°4: Statique avec frottement 20

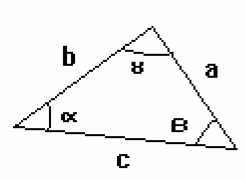
Solution TD N°4 21

TD N°5: centre de masse 25

Solution TD N°5 26

T.D. N°1
Rappel mathématique

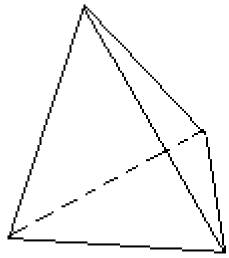
Exercice 1 : Trouver la relation qui relie les cotés a, b, et c d'un triangle à ses angles α, β, et γ.



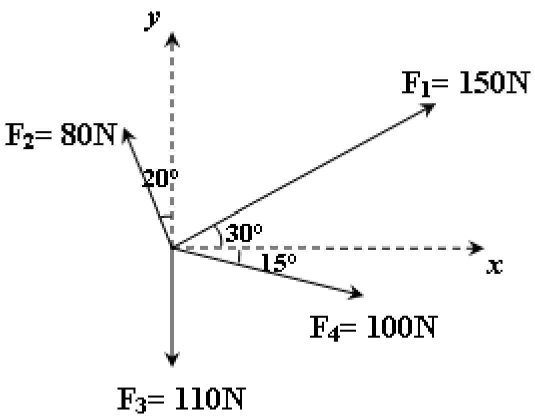
Exercice 2 : Dans un repère orthonormé direct on donne les points suivants: A(2,1,0); B(1,3,0); C(1,1,4).

-Calculer l'aire du triangle ABC, le volume du tétraèdre OABC et la distance OH de O au plan ABC.

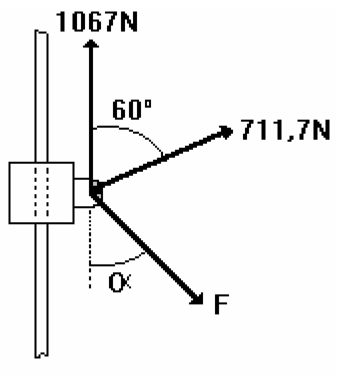
-Donner le vecteur unitaire perpendiculaire au plan ABC.



Exercice 3 : Calculer la résultante R des 4 forces appliquées comme le montre la figure.



Exercice 4 : Un manchon qui peut glisser dans un axe vertical est sollicité par les trois forces représentées. La direction de F peut varier. Dites s'il est possible que F forme avec les deux autres forces une résultante R horizontale, sachant que la grandeur de F est : a) 2135 N , b) 1245 N.



Solution T.D. N°1

Rappel

Le plan étant muni d'un repère orthonormé, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x',y';z')$ est le nombre réel défini :

$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u};\vec{v})$

- Si $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$
- Norme de la somme de deux vecteurs : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$

On appelle produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x',y';z')$ le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par :

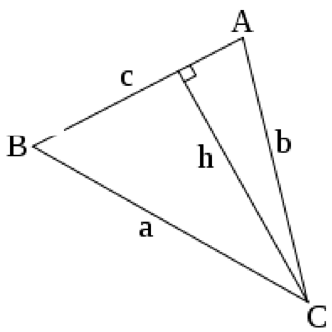
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz'-zy' \\ zx'-xz' \\ xy'-yx' \end{pmatrix}$$

$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\vec{u};\vec{v})$

- Si $\vec{u} // \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- Aire d'un parallélogramme **:** $aire(ABCD) = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|$

Exercice N°1 :

On considère un triangle de côtés a, b, et c, et α, β, γ ses angles aux sommets A, B, et C. La hauteur issue de C divise le triangle ABC en deux triangles rectangles. Notons h cette hauteur; on peut appliquer la définition du sinus dans les deux petits triangles rectangles pour exprimer h:



$\sin\alpha = \dfrac{h}{b}$ et $\sin\beta = \dfrac{h}{a}$

Dont on tire deux expressions pour *h*

$h = b\sin\alpha = a\sin\beta$

et donc : $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$

En faisant de même avec la hauteur issue de A on obtient : $\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$

La formule dite des sinus est alors :

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

Exercice N°2 :

Calcul de l'aire du triangle ABC :

L'aire d'un triangle peut ce calculer a partir du produit vectoriel :

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0\\0 & -2 & 4\end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}=8\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{8^2+4^2+2^2}=\sqrt{84}$$

L'aire du triangle ABC : $S=\frac{\sqrt{84}}{2}$

Calcul du volume du tétraèdre OABC :

Le volume d'un tétraèdre peut ce calculer a partir du produit mixte :

$$V=\overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC})$$

$$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$V=(2\vec{i}+1\vec{j})(8\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k})=20$$

Calcul de la distance OH de O au plan ABC :

Le volume d'un tétraèdre peut s'exprimer par cette formule :

$$V=\frac{1}{3}SOH$$

Où S est la surface de la base du tétraèdre et OH la hauteur du tétraèdre s'appuyant sur cette base.

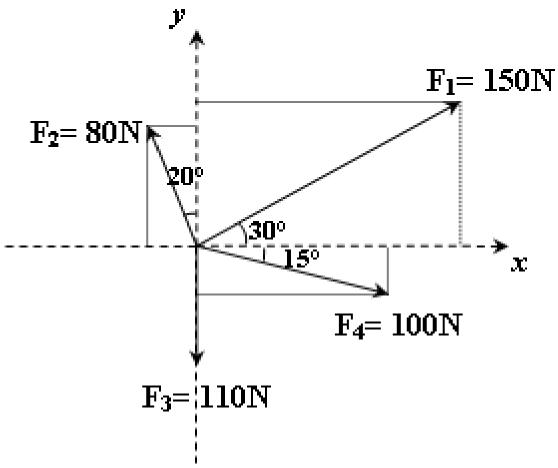
Donc $OH = \frac{3V}{S} \Rightarrow OH = 13.09$

<u>Expression du vecteur unitaire perpendiculaire au plan ABC</u>

On a déjà calculé le vecteur perpendiculaire au plan ABC : $\vec{D} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} = 8\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$

Le vecteur $\vec{D}$ peut s'écrire en fonction de son vecteur unitaire par : $\vec{D} = \|\vec{D}\| \overrightarrow{u_D}$

Donc $\overrightarrow{u_D} = \frac{\vec{D}}{\|\vec{D}\|}$, $\overrightarrow{u_D}(\frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}})$



<u>Exercice N°3 :</u>

$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4}$

La projection sur les axes du repère :

Sur l'axe ox :

$R_x = F_1 \cos 30 - F_2 \sin 20 + F_4 \cos 15$

Sur l'axe oy :

$R_y = F_1 \sin 30 + F_2 \cos 20 - F_3 - F_4 \sin 15$

A.N: $R_x = 199.24N$ et $R_y = 14.22N$

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \Rightarrow R = 199.7N$

<u>Exercice N°4 :</u>

$\vec{R} = \vec{F} + \vec{F_1} + \vec{F_2}$

La projection sur les axes du repère :

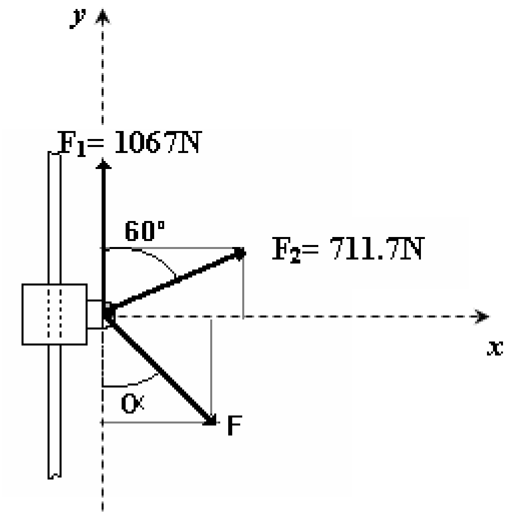
Sur l'axe ox :

$R = F \sin\alpha + F_2 \cos 30$ ……. (1)

Sur l'axe oy :

$0 = -F \cos\alpha + F_2 \sin 30 + F_1$ ……. (2)

De l'équation (2) : $\cos\alpha = \frac{F_2 \sin 30 + F_1}{F}$ ……. (3)



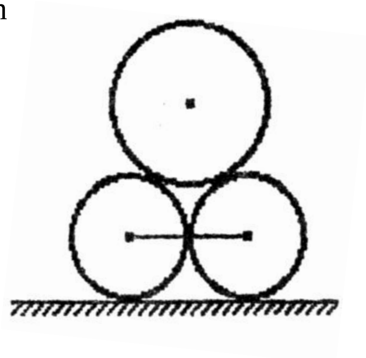
A.N :

1^er cas : F= 2135N : $\cos\alpha = 0.66$ donc on peut avoir une résultante horizontale.

2^eme cas : F= 1245N : $\cos\alpha = 1.14$ dans ce cas impossible d'avoir une résultante horizontale.

T.D. N°2
Statique

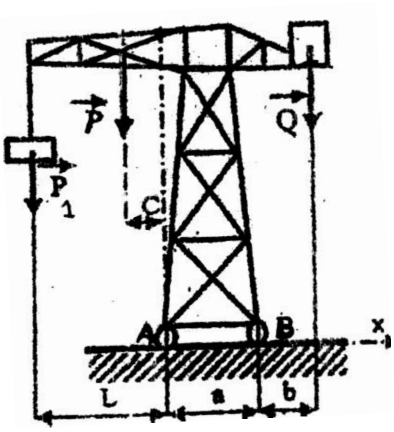
Exercice 1 : Un cylindre homogène de rayon R et de poids Q s'appuie sur deux cylindres identiques de rayon r et de poids P qui reposent sur un plan horizontal. Les centres des deux derniers cylindres sont reliés par un fil de longueur 2r.



Déterminer la tension du fil, la réaction des cylindres sur le plan ainsi que les réactions entre les cylindres en négligeant les frottements.

Exercice 2 : Le poids de la grue représentée ci contre est égal, sans contrepoids à P. La ligne d'action de P passe à une distance c de la roue gauche A. L'écartement des roues est AB = a, la charge maximale que peut soulever la grue est égale à P_1.

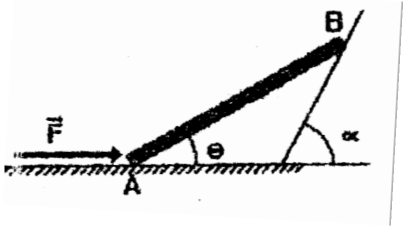
On veut garantir la stabilité de la grue en charge et à vide. On donne L=4a, b=c, c=a/2, P_1=P/2



En fonction de P

1- Calculer les valeurs minimales Q_{1v} et maximale Q_{2v} du contrepoids correspondant au basculement de la grue à vide (P_1=0)
2- Calculer les valeurs minimales Q_{1c} et maximale Q_{2c} du contrepoids correspondant au basculement de la grue en pleine charge (P_1=P/2)
3- En déduire la plage de variation du contrepoids Q pour un fonctionnement stable à vide et en charge.

Exercice 3 : une barre de longueur L et de poids P est soulevée par la force F comme le montre la figure ci contre. En négligeant les frottements en A et B :

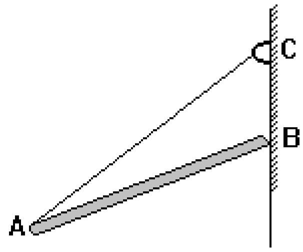


1- calculer l'angle θ à l'équilibre.

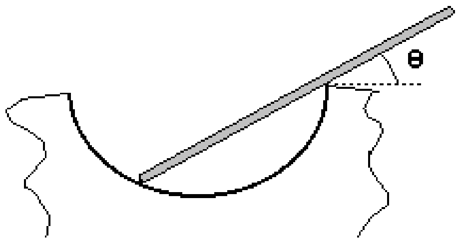
A. N: P = 89N, F = 44.5N , L = 6cm, α = 60°

Exercice 4 : Une barre AB de longueur 2m en état d'équilibre s'appuie en A sans frottement sur un mur et le point A est attaché à une corde AC.

Calculer dans ce cas la longueur de la corde si BC = 2m.

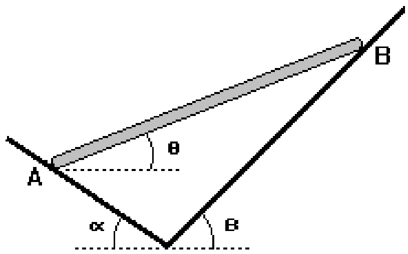


Exercice 5 : Une tige uniforme AB, de longueur 3R, repose à l'intérieur d'un hémisphère de rayon R. Calculez l'angle θ pour que la tige soit en équilibre (on néglige les frottements).



Exercice 8 : Une tige AB, de longueur L et de poids P repose sur deux plans inclinés.

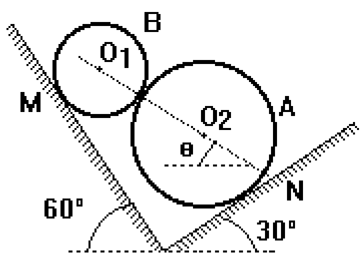
On négligeant les frottement en A et B, calculer les réactions de la barre sur les deux plans ainsi que l'angle θ que fait la barre avec l'horizontale à l'équilibre.



Exercice 9 : Deux cylindres A et B reposent sur deux plans inclinés comme le montre la figure.

Le cylindre A pèse 300N et le B pèse 100N.

a- Calculer l'angle θ à l'équilibre.
b- Calculer les réactions en M et en N.
c- Calculer la réaction entre les deux cylindres.



Solution T.D. N°2

Rappel

Pour que le solide sous l'action de N forces extérieures soit en équilibre statique il faut et il suffit que :

- *La résultante de toutes les forces extérieures appliquées au solide, soit nulle :* $\sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{F_i}=\vec{0}$

- *Le moment résultant de toutes ces forces en un point O, soit nul:* $\sum_{i=1}^{N}M_{/O}(\overrightarrow{F_i})=\vec{0}$

Méthode de résolution :

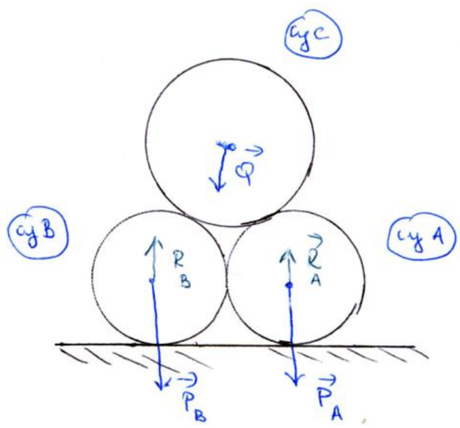
1. Isoler le système étudié : Isoler c'est tracer une frontière. L'intérieur de la frontière est le système isolé. Il doit être en équilibre. On ne retient, de l'extérieur de la frontière, que les actions mécaniques s'appliquant au système isolé.
2. Faire le bilan des actions mécaniques appliquées au système : On fait la liste de toutes les actions mécaniques qui s'appliquent au système étudié. En même temps on écrit sous forme de vecteur ces actions mécaniques.
3. Résoudre le problème : deux méthodes possibles :

* Graphique : uniquement des tracés, aucun calcul autre que mise à l'échelle
* Analytique : uniquement des calculs

Exercice N°1 :

Toutes les forces agissant sur ces cylindres sont situées dans le plan *(xoy)*

1. Réaction des cylindres sur le plan :



La porte est en équilibre statique, nous pouvons écrire :

$$\sum\overrightarrow{F_i}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{P_A}+\overrightarrow{P_B}+\vec{Q}+\overrightarrow{R_A}+\overrightarrow{R_B}=\vec{0}$$

La projection sur l'axe oy :

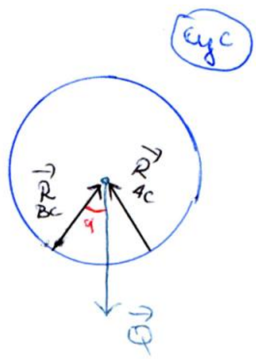
$$-P_A-P_B-Q+R_A+R_B=0 \ldots\ldots. (1)$$

On a : $P_A=P_B=P$ et $R_A=R_B=R$

De l'équation (1) : $R=\dfrac{2P+Q}{2}$

2. Réactions entre les cylindres :

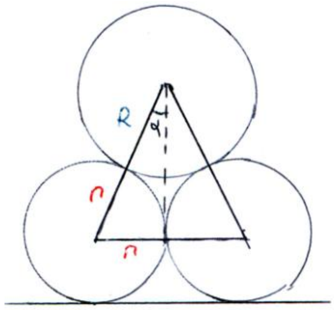
En isolant le cylindre C :



$$\sum\overrightarrow{F_i}=\vec{0}$$

$$\vec{Q}+\overrightarrow{R_{AC}}+\overrightarrow{R_{BC}}=\vec{0}$$

La projection sur les axes du repère :



Sur l'axe ox : $R_{AC}\sin\alpha - R_{BC}\sin\alpha = 0$ ……. (1)

Sur l'axe oy : $-Q + R_{AC}\cos\alpha + R_{BC}\cos\alpha = 0$ ……. (2)

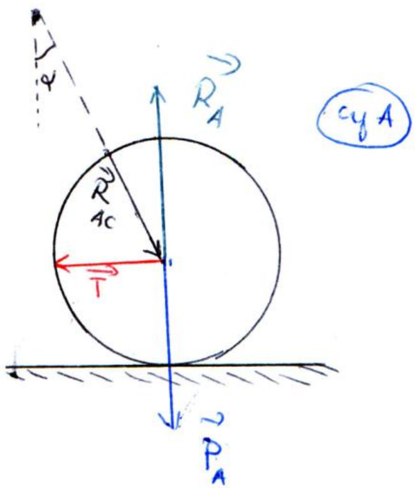
De l'équation (1) : $R_{AC} = R_{BC}$

Donc de l'équation (2) : $R_{AC} = \dfrac{Q}{2\cos\alpha}$

On a : $\sin\alpha = \dfrac{r}{r+R}$ et $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ donne : $\cos\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{r^2}{(R+r)^2}}$

Alors : $R_{AC} = R_{BC} = \dfrac{(R+r)Q}{2\sqrt{R^2 - 2Rr}}$

Remarque : la réaction entre le cylindre A et B est nulle car sans le fil le système ne serait en équilibre.



3. La tension dans le fil :

En isolant le cylindre A :

$$\sum \vec{F_i} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{P_A} + \overrightarrow{R_A} + \vec{T} + \overrightarrow{R_{AC}} = \vec{0}$$

La projection sur les axes du repère :

Sur l'axe ox : $-T + R_{AC}\sin\alpha = 0$ ……… (1)

Sur l'axe oy : $-P_A + R_A - R_{AC}\cos\alpha = 0$ ……… (2)

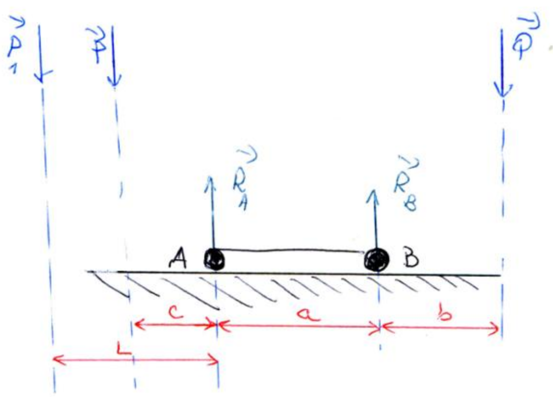
De l'équation (1) : $T = R_{AC}\sin\alpha$

Donc : $T = \dfrac{rQ}{2\sqrt{R^2 - 2Rr}}$

Exercice N°2 :

La grue est en équilibre statique. Le moment résultant par rapport au point A et B est nul.

$$\sum M_{/A}(\vec{F_i}) = 0$$



$$M_{/A}(\vec{P_1})+M_{/A}(\vec{P})+M_{/A}(\vec{R_A})+M_{/A}(\vec{R_B})+M_{/A}(\vec{Q})=0$$

$$P_1L+Pc+R_Ba-Q(a+b)=0 \ldots\ldots (1)$$

$$\sum M_{/B}(\vec{F_i})=0$$

$$M_{/B}(\vec{P_1})+M_{/B}(\vec{P})+M_{/B}(\vec{R_A})+M_{/B}(\vec{R_B})+M_{/B}(\vec{Q})=\vec{0}$$

$$P_1(L+a)+P(c+a)-R_Aa-Qb=0 \ldots\ldots (2)$$

1. Calcul des valeurs min et max de Q quand P_1=0 :

Q_{min} (Q_{1v}) : R_B=0

L'équation (1) devient: $Pc-Q_{1v}(a+b)=0$, donc $Q_{1v}=\dfrac{P}{3}$

Q_{max} (Q_{2v}) : R_A=0

L'équation (2) devient: $P(c+a)-Q_{2v}b=0$, donc $Q_{2v}=3p$

2. Calcul des valeurs min et max de Q quand P_1=P/2 :

Q_{min} (Q_{1c}) : R_B=0

L'équation (1) devient: $P_1L+Pc-Q_{1c}(a+b)=0$, donc $Q_{1c}=\dfrac{5P}{3}$

Q_{max} (Q_{2c}) : R_A=0

L'équation (2) devient: $P_1(L+a)+P(c+a)-Q_{2c}b=0$, donc $Q_{2c}=8p$

3. La plage de variation du contrepoids Q pour un fonctionnement stable à vide et en charge :

L'intervalle est : $\dfrac{5P}{3}\leq Q\leq 3p$

Exercice N°3 :

Calcul de l'angle θ à l'équilibre :

La barre est en équilibre statique, nous pouvons écrire :

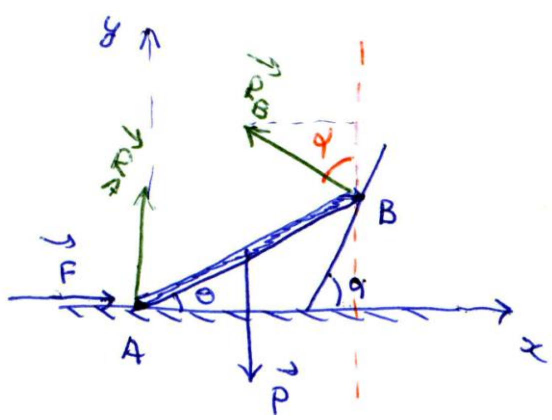
$$\sum \vec{F_i}=\vec{0}$$

$$\vec{P}+\vec{F}+\vec{R_A}+\vec{R_B}=\vec{0}$$

La projection sur les axes du repère :

Sur l'axe ox : $F-R_B\sin\alpha=0$ ……. (1)

Sur l'axe oy : $-P+R_A+R_B\cos\alpha=0$ ……. (2)



De l'équation (1) : $R_B = \frac{F}{\sin\alpha}$

De l'équation (2) : $R_A = P - \frac{F\cos\alpha}{\sin\alpha}$

A.N : $R_A = 63.3N$ et $R_B = 51.38N$

Le moment résultant par rapport B est nul.

$$\sum M_{/B}(\vec{F_i}) = 0$$

$$M_{/B}(\vec{P}) + M_{/B}(\vec{F}) + M_{/B}(\vec{R_A}) + M_{/B}(\vec{R_B}) = \vec{0}$$

$$P\frac{L}{2}\cos\theta + FL\sin\theta - R_A L\cos\theta = 0$$

$$tg\theta = \frac{-(\frac{P}{2} - R_A)}{F} \Rightarrow \theta = arctg(\frac{-(\frac{P}{2} - R_A)}{F})$$

A.N : $\theta = 22.7°$

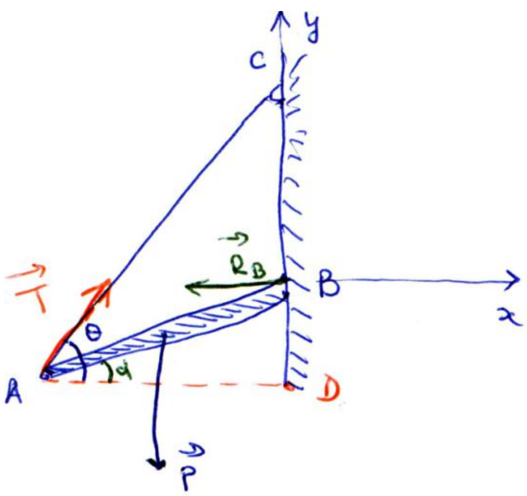
Exercice N°4 :

Calcul de la longueur de la corde AC :

Le système donné est en équilibre statique. La somme des forces est nulle :

$$\sum \vec{F_i} = \vec{0}$$

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R_B} = \vec{0}$$



La projection sur les axes du repère :

Sur l'axe ox : $-R_B + T\cos\theta = 0$ ……… (1)

Sur l'axe oy : $-P + T\sin\theta = 0$ ………... (2)

Des équations (1) et (2) : $tg\theta = \frac{P}{R_B}$

Le moment résultant par rapport A est nul.

$$\sum M_{/A}(\vec{F_i}) = 0$$

$$M_{/A}(\vec{P}) + M_{/A}(\vec{T}) + M_{/A}(\vec{R_B}) = 0$$

$$-p\frac{AB}{2}\cos\alpha + R_B AB\sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow tg\alpha = \frac{P}{2R_2}, \text{ alors } tg\alpha = \frac{1}{2}tg\theta$$

Du triangle ACD: $AC^2 = CD^2 + AD^2$ et $tg\theta = \dfrac{CD}{AD}$

Du triangle ABD: $AB^2 = AD^2 + DB^2$ et $tg\alpha = \dfrac{BD}{AD}$

Donc $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{1}{2}\dfrac{CD}{AD} \Rightarrow CD = 2BD = 2BC$

Et la relation $CD=CB+BD$

Alors $AC = \sqrt{3BC^2 + AB^2}$

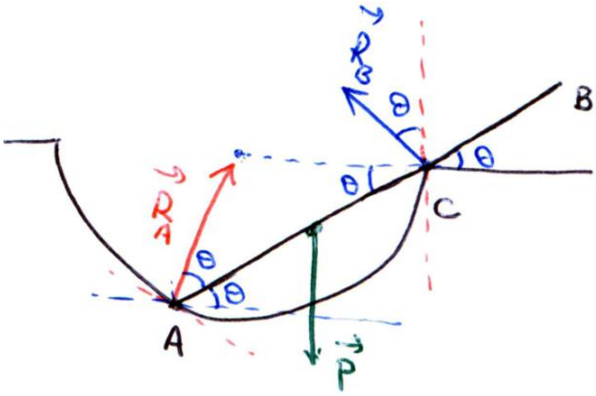
<u>Exercice N°5 :</u>

<u>Calcul de l'angle θ à l'équilibre</u>

Le système donné est en équilibre statique. La somme des forces est nulle :

$$\sum \vec{F_i} = \vec{0}$$

$$\vec{P} + \overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{R_B} = \vec{0}$$



La projection sur les axes du repère (*xoy*) :

Sur l'axe ox :

$$R_A \cos 2\theta - R_B \sin\theta = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

Sur l'axe oy :

$$-P + R_A \sin 2\theta + R_B \cos\theta = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$$

Le moment résultant par rapport A est nul.

$$\sum M_{/A}(\vec{F_i}) = 0$$

$$M_{/A}(\vec{P}) + M_{/A}(\overrightarrow{R_A}) + M_{/A}(\overrightarrow{R_B}) = 0$$

$$\vec{P} \wedge \frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \overrightarrow{R_B} \wedge \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -p \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{3R}{2}\cos\theta \\ \frac{3R}{2}\sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R_B \sin\theta \\ -R_B \cos\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2R\cos^2\theta \\ 2R\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} = 0$$

$$-\frac{3RP}{2}\cos\theta - 2RR_B \sin\theta\cos^2\theta - 2RR_B\cos^3\theta = 0$$

On simplifiant cette équation, on trouve que: $R_B = \dfrac{3P}{4}$

De l'équation (1) : $R_A = \dfrac{3P\sin\theta}{4\cos 2\theta}$

Dans l'équation (2) :

$$-P + \frac{3P\sin\theta}{4\cos 2\theta}\sin 2\theta + \frac{3P}{4}\cos\theta = 0$$

En utilisant ces formules :

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

L'équation devient après simplification :

$$-8\cos^2\theta + 3\cos\theta + 4 = 0$$

Si on pose $x = \cos\theta$: $-8x^2 + 3x + 4 = 0$

$\Delta = 137$

$$x_1 = 0.91 \Rightarrow \cos\theta_1 = 0.91 \Rightarrow \theta_1 = 24°$$
$$x_2 = -0.54 \Rightarrow \cos\theta_2 = -0.54 \Rightarrow \theta_2 = 122.6°$$

Donc θ à l'équilibre vaux 24°

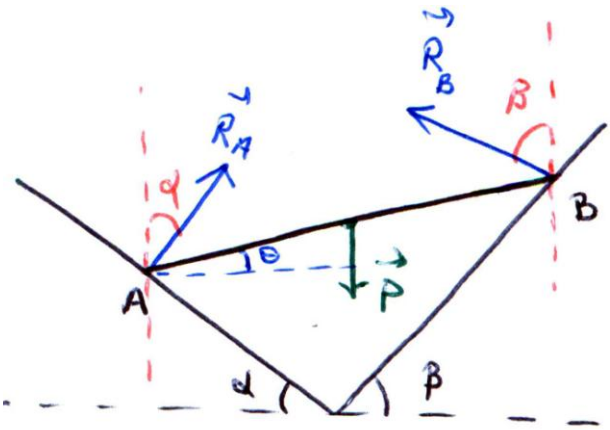
<u>Exercice N°6 :</u>

<u>1. Calcul des réactions de la barre sur les 2 plans :</u>

Le système donné est en équilibre statique. La somme des forces est nulle :

$$\sum \vec{F_i} = \vec{0}$$
$$\vec{P} + \vec{R_A} + \vec{R_B} = \vec{0}$$

La projection sur les axes du repère (xoy) :



Sur l'axe ox :

$$R_A\sin\alpha - R_B\sin\beta = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

Sur l'axe oy :

$$-P + R_A\cos\alpha + R_B\cos\beta = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$$

De l'équation (1) : $R_A = \dfrac{R_B\sin\beta}{\sin\alpha}$ ……. (3)

En remplaçant l'équation (3) dans l'équation (2) :

$$-P + R_B\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha} + R_B\cos\beta = 0$$

$$-P\sin\alpha + R_B\sin(\alpha+\beta) = 0$$

Donc : $R_B = \dfrac{P\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ ….. (4)

En remplaçant l'équation (4) dans l'équation (3) :

$$R_A = \frac{P\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

<u>2. Calcul de l'angle θ à l'équilibre :</u>

Le moment résultant par rapport A est nul.

$$\sum M_{/A}(\overrightarrow{F_i}) = 0$$

$$M_{/A}(\vec{P}) + M_{/A}(\overrightarrow{R_A}) + M_{/A}(\overrightarrow{R_B}) = 0$$

$$\vec{P} \wedge \frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \overrightarrow{R_B} \wedge \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -p \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dfrac{AB}{2}\cos\theta \\ \dfrac{AB}{2}\sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R_B\sin\beta \\ R_B\cos\beta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} AB\cos\theta \\ AB\sin\theta \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{AB}{2}P\cos\theta - ABR_B\sin\beta\sin\theta - ABR_B\cos\beta\cos\theta = 0$$

$$\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\sin\beta\sin\theta - \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\cos\beta\cos\theta = 0$$

$$\frac{1}{2} - \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\sin\beta tg\theta - \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\cos\beta = 0$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{2} - \sin\alpha\sin\beta tg\theta - \sin\alpha\cos\beta = 0$$

Apres simplification :

$$tg\theta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{2\sin\alpha\sin\beta}$$

<u>**Exercice N°7 :**</u>

<u>1. Calcul des réactions aux points M et N :</u>

Le système donné est en équilibre statique. La somme des forces est nulle :

$$\sum \overrightarrow{F_i} = \vec{0}$$

$\overrightarrow{P_A} + \overrightarrow{P_B} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_M} = \vec{0}$

La projection sur les axes du repère :

Sur l'axe ox :

$-R_N \sin 30 + R_M \sin 60 = 0$ ………. (1)

Sur l'axe oy :

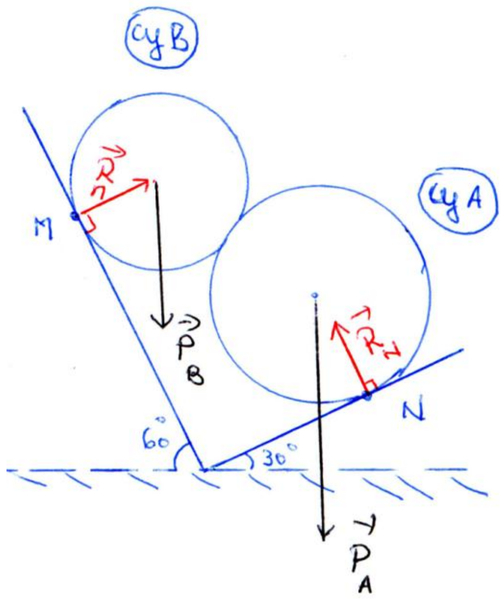
$-P_A - P_B + R_N \cos 30 + R_M \cos 60 = 0$ ………. (2)

On remplaçant $\cos 60$ par $\sin 30$ dans l'équation (1), on trouve que :

$R_M = R_N tg30$… (3)

En remplaçant l'équation (3) dans l'équation (2) :

$R_N = 346.4N$ et $R_M = 200N$



2. Calcul de l'angle θ à l'équilibre :

On prend le cylindre A :

La somme des forces appliquées sur le cylindre A est nulle :

$\sum \overrightarrow{F_i} = \vec{0}$

$\overrightarrow{P_A} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_{BA}} = \vec{0}$

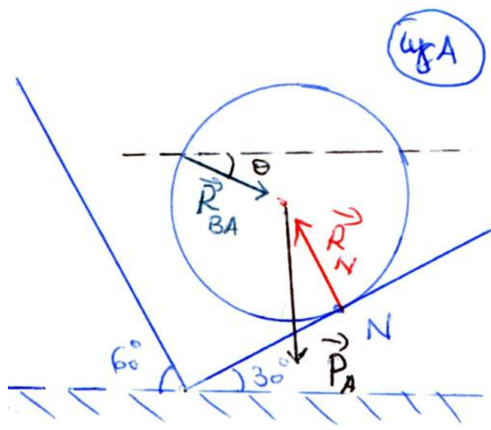
La projection sur les axes du repère :

Sur l'axe ox :

$-R_N \sin 30 + R_{BA} \cos\theta = 0$ ………. (1)

Sur l'axe oy :

$-P_A + R_N \cos 30 - R_{BA} \sin\theta = 0$ ………. (2)



De l'équation (1) : $R_{BA} = \dfrac{R_N \sin 30}{\cos\theta}$ …. (3)

En remplaçant l'équation (3) dans l'équation (2) : $tg\theta = \dfrac{-P_A + R_N \cos 30}{R_N \sin 30}$

A.N : $tg\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0°$

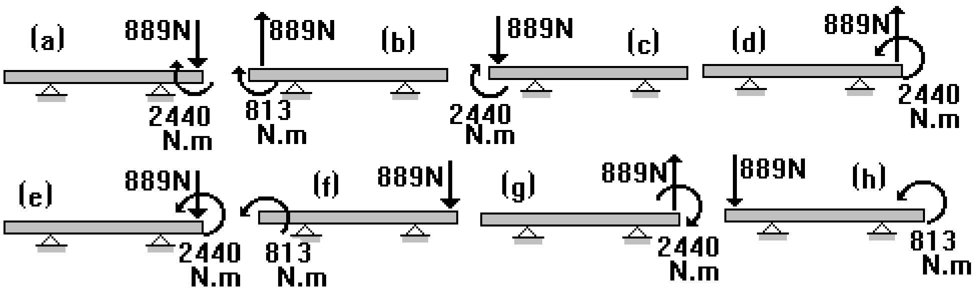
3. Calcul de la réaction entre les 2 cylindres :

De l'équation (3) : $R_{BA} = 173N$

T.D. N°3

Statique

Exercice 1 : Une poutre de 3,66m de long est chargée de différentes manières, comme l'indique la figure. Localisez parmi ces mises en charge celles qui sont équivalentes.

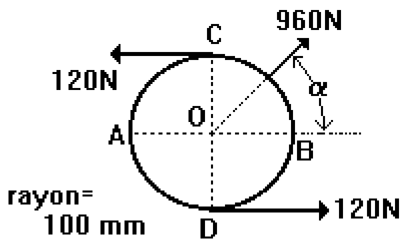


Exercice 2 : La force et le couple illustrés par la figure doivent être remplacés par une force unique. Déterminer la valeur de α pour que la ligne d'action de la force unique équivalente passe par le point B.

Sachant que α = 60°, remplacer la force et le couple par une force unique appliquée à un point : a) de la ligne AB

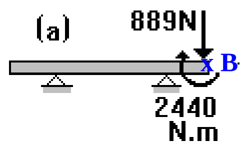
b) sur la ligne CD

Déterminer pour chaque cas la distance entre le point O et le point d'application de la force.



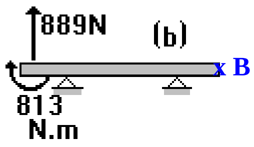
Solution T.D. N°3

Exercice N°1 :



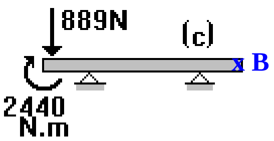
$\sum F = -889N$

$\sum M(\overrightarrow{F})_{/B} = -2240N.m$



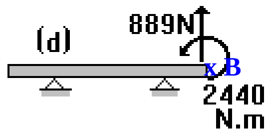
$\sum F = 889N$

$\sum M(\overrightarrow{F})_{/B} = -813 - 889.6.33 = -6440.37 N.m$



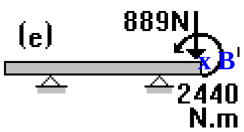
$\sum F = -889N$

$\sum M(\overrightarrow{F})_{/B} = -2240 + 889.633 = 813N.m$



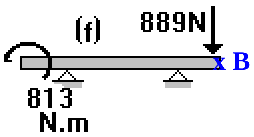
$\sum F = 889N$

$\sum M(\overrightarrow{F})_{/B} = 2240N.m$



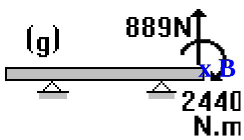
$\sum F = -889N$

$\sum M(\overrightarrow{F})_{/B} = 2240N.m$



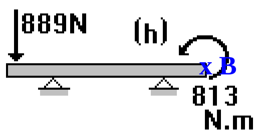
$\sum F = -889N$

$\sum M(\overrightarrow{F})_{/B} = 813N.m$



$\sum F = 889N$

$\sum M(\overrightarrow{F})_{/B} = -2240N.m$



$\sum F = -889N$

$\sum M(\overrightarrow{F})_{/B} = 813 + 889.633 = 4066.74 N.m$

Donc **c** et **f** sont équivalentes.

Exercice N°2 :

1. Valeur de α pour que la force unique passe par le point B :

Si on considère que la force unique passe par le point B, donc le moment résultant par rapport au point B est nul.

$$\sum M(\vec{F})_{/B} = 0$$

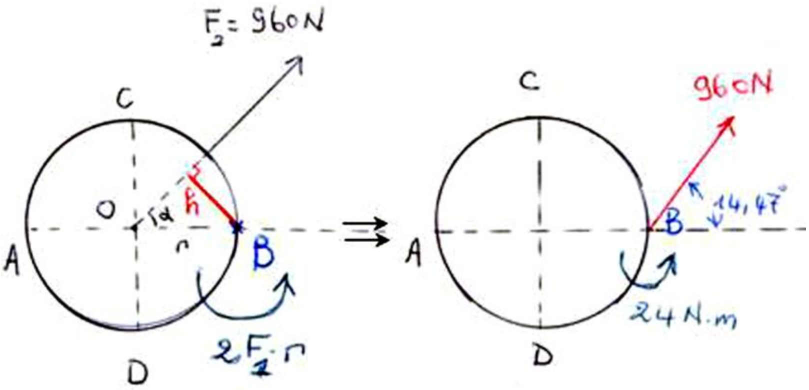
$$\sum M(\vec{F})_{/B} = 2M_{/B}(\vec{F_1}) + M_{/B}(\vec{F_2}) = 0$$

$$2F_1 r - F_2 h = 0 \Rightarrow h = \frac{2F_1 r}{F_2}$$

$$\text{A.N}: h = \frac{2.120.100}{960} = 25mm$$

$$\text{Et on a : } \sin\alpha = \frac{h}{r} \Rightarrow \alpha = \arcsin(\frac{h}{r})$$

$$\text{A.N}: \alpha = \arcsin(\frac{25}{100}) \Rightarrow \alpha = 14.47°$$



2. Une force unique appliquée a un point de la ligne AB :

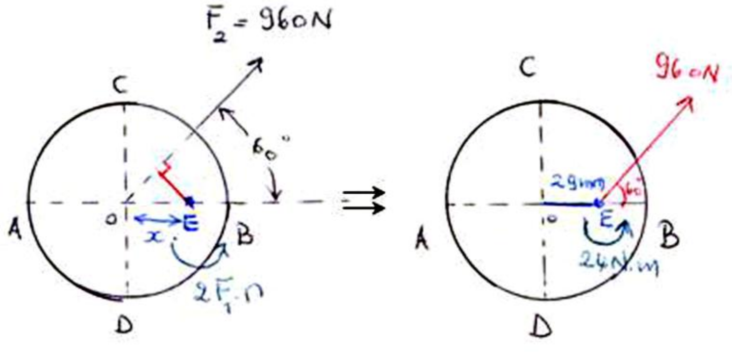
On considère le point E de la ligne AB est le point d'application de la force unique. On note que la distance entre les points E et O est x. Le moment résultant par rapport au point E est nul.

$$\sum M(\vec{F})_{/E} = 0$$

$$\sum M(\vec{F})_{/E} = 2M_{/E}(\vec{F_1}) + M_{/E}(\vec{F_2}) = 0$$

$$2F_1 r - F_2 x \sin\alpha = 0 \Rightarrow x = \frac{2F_1 r}{F_2 \sin\alpha}$$

$$\text{A.N}: x = \frac{2.120.100}{960 \sin 60} = 29mm$$

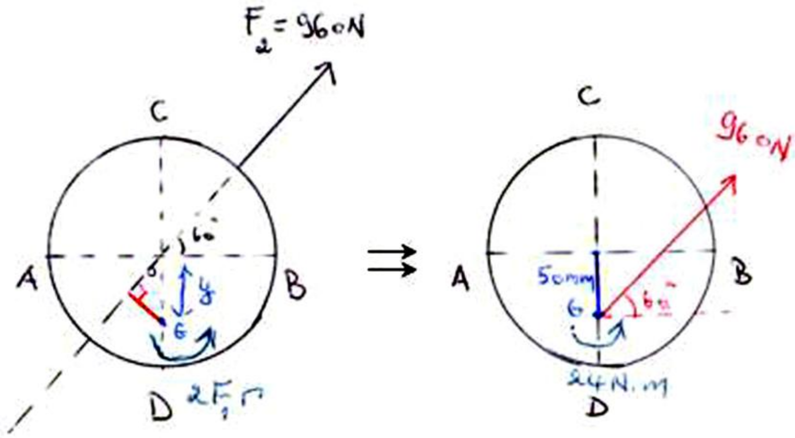


3. Une force unique appliquée a un point de la ligne CD :

On considère le point G de la ligne CD est le point d'application de la force unique. On note que la distance entre les points G et O est y. Le moment résultant par rapport au point G est nul.

$$\sum M(\vec{F})_{/G} = 0$$

$$\sum M(\vec{F})_{/G} = 2M_{/G}(\vec{F_1}) + M_{/G}(\vec{F_2}) = 0$$



$$2F_1 r - F_2 y\cos\alpha = 0 \Rightarrow y = \frac{2F_1 r}{F_2\cos\alpha}$$

$$\text{A.N : } y = \frac{2.120.100}{960\cos 60} = 50mm$$

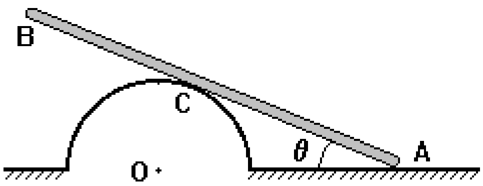
T.D. N°4

Statique avec frottement

Exercice 1 :

Une barre AB de longueur L = 1m et de poids P repose en A sur un plan rugueux et en C sur un hémisphère de rayon R = 25cm avec le même coefficient de frottement $\mu = 0.25$.

Calculer la plus grande valeur de l'angle θ à l'équilibre.



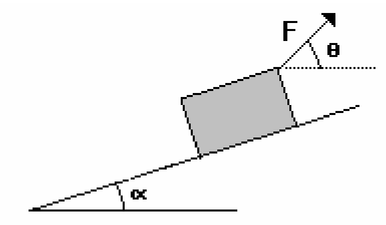
Exercice 2 :

Une caisse de poids 445N repose sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 25°$ avec un frottement de coefficient $\mu = 0.2$.

Calculer la grandeur et la direction de la plus petite force F :

a. qui fait monter la caisse vers le haut du plan.

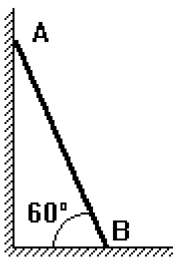
b. qui empêche la caisse de glisser vers le bas du plan.



Exercice 3 :

Une échelle de poids négligeable et de longueur L = 5.1m, fait un angle de 60° avec l'horizontale, s'appuie en A sur un mur lisse (sans frottement) et en B sur un plan horizontal rugueux avec un angle de frottement $\varphi = 20°$.

Déterminer jusqu'à quelle hauteur sur l'échelle un homme de poids P = 700N peut arriver sans que l'échelle glisse.



Solution T.D. N°4

Rappel

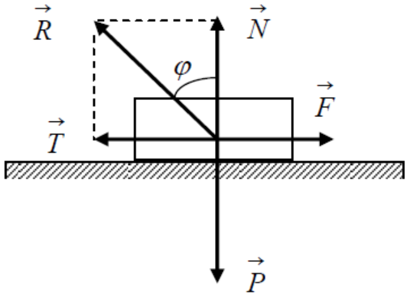
Dans le cas d'une surface avec frottements, la condition d'équilibre s'écrira :

$$\vec{N}+\vec{T}+\sum_i \vec{F_i}=\vec{0}$$

La force de frottement $\vec{T}$ est dirigée dans le sens contraire du mouvement et l'angle φ est appelé angle de frottement statique.

$$tg\varphi=\frac{T}{N}=\mu$$

Où µ est le coefficient de frottement statique



Exercice N°1 :

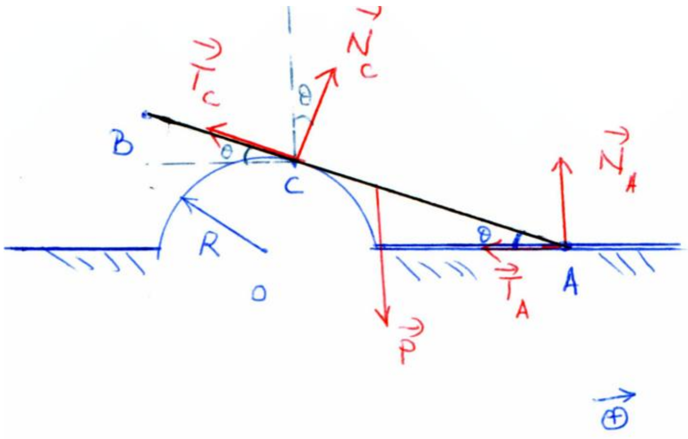
1. Calcul de la plus grande valeur de l'angle θ à l'équilibre:

Toutes les forces agissant sur ces cylindres sont situées dans le plan *(xoy)*

Le système donné est en équilibre statique. La somme des forces et le moment résultant par rapport A sont nuls :

$$\sum \vec{F_i}=\vec{0}$$

$$\vec{T}+\vec{T_C}+\vec{T_A}+\vec{N_A}+\vec{N_C}=\vec{0}$$



La projection sur les axes du repère (*xoy*) :

Sur l'axe ox :

$$-T_A-N_C\sin\theta-T_C\cos\theta=0 \;\ldots\ldots\; (1)$$

Sur l'axe oy :

$$-N_A-P+N_C\cos\theta+T_C\sin\theta=0 \ldots\ldots\; (2)$$

On a les forces de frottement $T_A=\mu N_A$ et $T_C=\mu N_C$

Les équations (1) et (2) deviennent :

$$-\mu N_A-N_C\sin\theta-\mu N_C\cos\theta=0\ldots\ldots\; (1)$$

$$-N_A-P+N_C\cos\theta+\mu N_C\sin\theta=0 \ldots\ldots\; (2)$$

$$\sum M_{/A}(\vec{F_i})=0$$

$$M_{/A}(\vec{P})+M_{/A}(\overrightarrow{N_C})=0$$

$$p\frac{L}{2}\cos\alpha - N_C AC = 0 \ldots\ldots (3)$$

Du triangle OCA : $AC=\dfrac{R}{tg\theta}\ldots\ldots (4)$

En remplaçant l'équation (4) dans (3), on trouve

$$N_C=\frac{P\sin\theta}{2RL}\ldots\ldots (5)$$

En remplaçant l'équation (5) dans (1), on trouve

$$-\mu N_A-\frac{P\sin^2\theta}{2RL}-\mu\frac{P\sin\theta}{2RL}\cos\theta=0\ldots\ldots (6)$$

Et en remplaçant l'équation (5) dans (2), on trouve

$$-N_A-P+\frac{P\sin\theta}{2RL}\cos\theta+\mu\frac{P\sin^2\theta}{2RL}=0\ldots\ldots (7)$$

En simplifiant les équations (6) et (7) :

$$\left(\frac{1}{2\mu R}+\frac{\mu}{2R}\right)\sin^2\theta-1=0$$

Donc $\sin\theta=\sqrt{\dfrac{2\mu R}{1+\mu^2}}\Rightarrow\theta=\arcsin\left(\sqrt{\dfrac{2\mu R}{1+\mu^2}}\right)$

A.N : $\theta=20°$

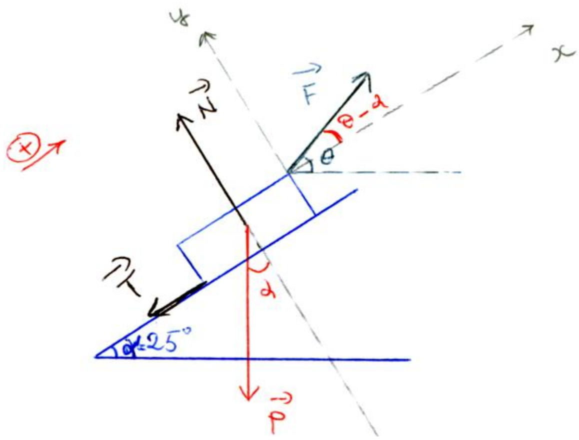
Exercice N°2 :

1. Calcul de la force F qui fait monter la caisse vers le haut du plan :

Le système donné est en équilibre statique. La somme des forces est nulle :

$$\sum\vec{F_i}=\vec{0}$$

$$\vec{P}+\vec{T}+\vec{F}+\vec{N}=\vec{0}$$



La projection sur les axes du repère (xoy) :

Sur l'axe ox :

$$-T-P\sin\alpha+F\cos(\theta-\alpha)=0 \;\ldots\ldots (1)$$

Sur l'axe oy :

$N - P\cos\alpha + F\sin(\theta-\alpha) = 0$ ……. ..(2)

On a la force de frottement $T = \mu N$

L'équation (1) devient : $-\mu N - P\sin\alpha + F\cos(\theta-\alpha) = 0$

Et $N = \dfrac{-P\sin\alpha + F\cos(\theta-\alpha)}{\mu}$ …. ..(3)

En remplaçant l'équation (3) dans (2) :

$$\frac{-P\sin\alpha + F\cos(\theta-\alpha)}{\mu} - P\cos\alpha + F\sin(\theta-\alpha) = 0$$

$$-P(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + F(\cos(\theta-\alpha) + \mu\sin(\theta-\alpha)) = 0$$

$F = \dfrac{P(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos(\theta-\alpha) + \mu\sin(\theta-\alpha)}$ …. ..(4)

$F_{\min} \Rightarrow (\cos(\theta-\alpha) + \mu\sin(\theta-\alpha))_{\max}$

$(\cos(\theta-\alpha) + \mu\sin(\theta-\alpha))_{\max} \Rightarrow$ sa dérivé par rapport a l'angle θ égale a 0.

$-\sin(\theta-\alpha) + \mu\cos(\theta-\alpha) = 0 \Rightarrow tg(\theta-\alpha) = \mu$

Le coefficient de frottement $\mu = tg\varphi$

$tg(\theta-\alpha) = tg\varphi \Rightarrow \theta = \varphi + \alpha$

A.N : $\theta = 36.3°$

La grandeur de F peut être calculée de la formule (4) : $F = 263.4N$

<u>2. Calcul de la force F qui empêche la caisse de glisser vers le bas du plan :</u>

C'est les mêmes étapes que la question 1 sauf que dans ce cas la direction du frottement est inversé (–T=T) puisque la caisse glisse vers le bas.

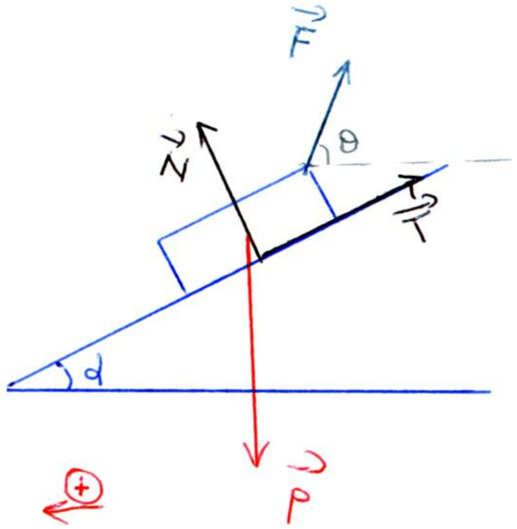
$\sum \vec{F_i} = \vec{0}$

$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F} + \vec{N} = \vec{0}$

Sur l'axe ox : $T - P\sin\alpha + F\cos(\theta-\alpha) = 0$ ……. (1)

Sur l'axe oy : $N - P\cos\alpha + F\sin(\theta-\alpha) = 0$ ……. ..(2)

Donc : $F = \dfrac{P(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\cos(\theta-\alpha) - \mu\sin(\theta-\alpha)}$ ……. ..(3)



$F_{\min} \Rightarrow (\cos(\theta-\alpha) - \mu\sin(\theta-\alpha))_{\max}$

$\left(\cos(\theta-\alpha)-\mu\sin(\theta-\alpha)\right)_{\max} \Rightarrow$ sa dérivé par rapport a l'angle θ égale a 0.

$-\sin(\theta-\alpha)-\mu\cos(\theta-\alpha)=0 \Rightarrow tg(\theta-\alpha)=-tg\varphi$

$\Rightarrow \theta=\alpha-\varphi$ et $\theta=13.7°$

La grandeur de F peut être calculée de la formule (3) : $F=105.3N$

Exercice N°3 :

Détermination de la hauteur maximum :

Le système donné est en équilibre statique. La somme des forces est nulle :

$\sum \vec{F_i}=\vec{0}$

$\vec{P}+\vec{R_A}+\vec{T}+\vec{N_B}=\vec{0}$

La projection sur les axes du repère (xoy) :

Sur l'axe ox : $T-R_A=0$ ……. (1)

Sur l'axe oy : $N_B-P=0$ ……. ..(2)

Avec la force de frottement $T=\mu N_B$ et le coefficient de frottement $\mu=tg\varphi$

De (1) et (2) on obtient : $R_A=\mu N_B=\mu P$

Le moment résultant par rapport au point B est nul :

$\sum M_{/B}(\vec{F_i})=0$

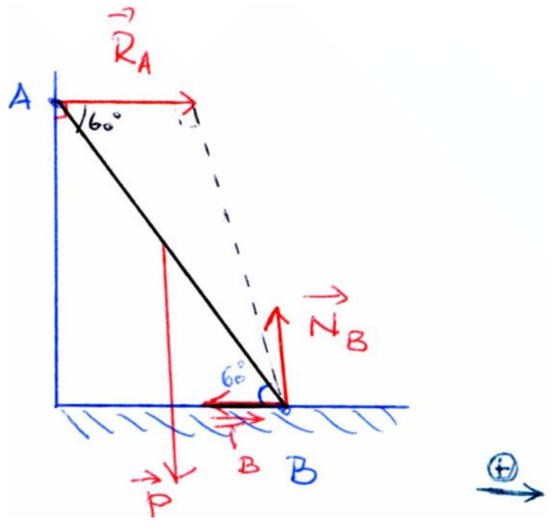
$M_{/B}(\vec{P})+M_{/B}(\vec{R_A})=\vec{0}$

$Ph\cos 60-R_A L\sin 60=0$

$Ph\cos 60-\mu PL\sin 60=0$

Donc $h=\mu L tg60$

A.N : $h=3.2m$



T.D. N°5

Centre de masse

Exercice 1 : Calculer les coordonnées du centre de masse des corps suivants:

1. un fil formé de trois parties rectilignes (figure 1).
2. un fil formé de trois demi-cercles (figure 2).
3. un fil sous forme d'arc de cercle de rayon *r* et d'angle 2α (figure 3).

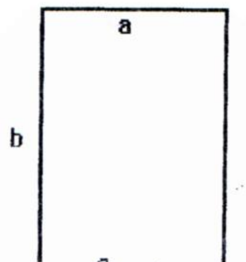


fig -1-

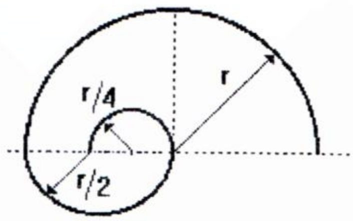


fig -2-

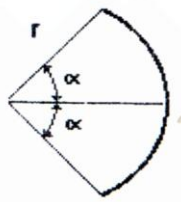
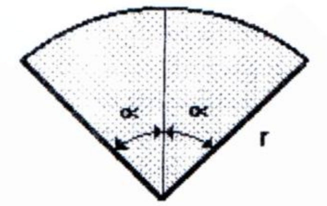
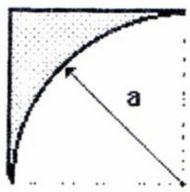


fig -3-

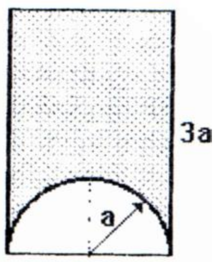
Exercice 2 : Déterminer le centre de masse des plaques suivantes :



(1)

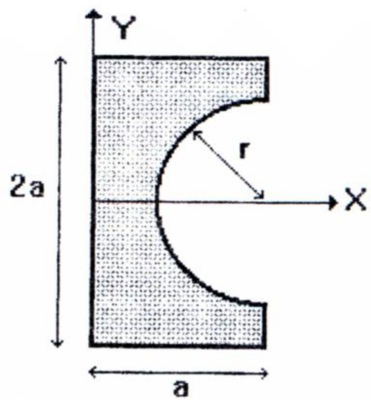


(2)



(3)

Exercice 3 : Calculer le volume du corps solide résultant de la révolution de la plaque ci contre autour de l'axe *oy*.



Exercice 4 : Calculer les coordonnées du centre de masse des solides suivants:

1. un hémisphère plein de rayon R.
2. un hémisphère vide de rayon R.
3. un cône plein de rayon R et de hauteur H.
4. un cône vide de rayon R et de hauteur H.

Solution T.D. N°5

Rappel

Centre de masse d'un système fait de particules :

Les coordonnées de masse dans un repère orthonormé:

$$x_G = \frac{1}{m}\sum_i m_i x_i \;;\; y_G = \frac{1}{m}\sum_i m_i y_i \;,\; z_G = \frac{1}{m}\sum_i m_i z_i$$

Centre de masse d'un système continu :

$$x_G = \frac{\int xdm}{m},\; y_G = \frac{\int ydm}{m},\; z_G = \frac{\int zdm}{m}$$

Où m est la masse totale, $m = \sum_i m_i$. Elle s'exprime en fonction de la géométrie du corps :

m =μ L, μ densité linéaire de masse et L Longueur du corps
m =σ S, σ densité surfacique de masse et S Surface du corps
m = ρ V, ρ densité volumique de masse et V Volume du corps

Exercice N°1 :

1. Calcul des coordonnées du centre de masse d'un fil formé de 3 parties rectilignes :

On utilise la définition du centre de masse : $\begin{cases} x_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{m_{tot}} \\ y_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{m_{tot}} \end{cases}$

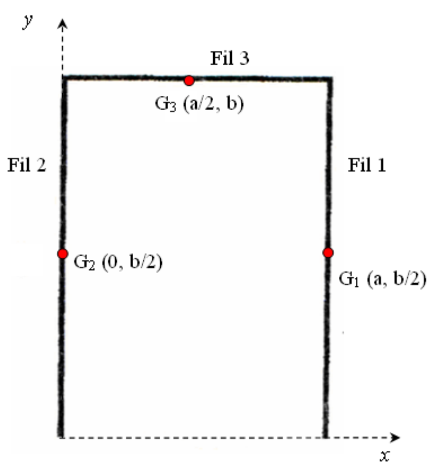
On charge les coordonnées des centres de masses de chaque fil

fil 1 $m_1 = \mu b$ $\begin{cases} x_{G1} = a \\ y_{G1} = \dfrac{b}{2} \end{cases}$

fil 2 $m_2 = \mu b$ $\begin{cases} x_{G2} = 0 \\ y_{G2} = \dfrac{b}{2} \end{cases}$

fil 3 $m_3 = \mu a$ $\begin{cases} x_{G3} = \dfrac{a}{2} \\ y_{G3} = b \end{cases}$

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{m_1 x_{G1} + m_2 x_{G2} + m_3 x_{G3}}{m_1 + m_2 + m_3} \\ y_G = \dfrac{m_1 y_{G1} + m_2 y_{G2} + m_3 y_{G3}}{m_1 + m_2 + m_3} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\mu a b + \dfrac{\mu a^2}{2}}{\mu(a+2b)} \\ y_G = \dfrac{\dfrac{\mu b^2}{2} + \dfrac{\mu b^2}{2} + \mu a b}{\mu(a+2b)} \end{cases}$$

Donc les coordonnées du centre de masse du fil sont :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{a}{2} \\ y_G = \dfrac{b(b+a)}{a+2b} \end{cases}$$

<u>2. Calcul des coordonnées du centre de masse d'un fil formé de 3 demi cercles :</u>

Le centre de masse d'un demi-cercle est égal : $C_G = \dfrac{2R}{\pi}$ avec R : est le rayon du demi-cercle.

On charge les coordonnées des centres de masses de chaque demi-cercle

<u>demi-cercle 1</u>

$m_1 = \mu\pi r$

$$\begin{cases} x_{G1} = 0 \\ y_{G1} = \dfrac{2r}{\pi} \end{cases}$$

<u>demi-cercle 2</u>

$m_2 = \mu\pi \dfrac{r}{2}$

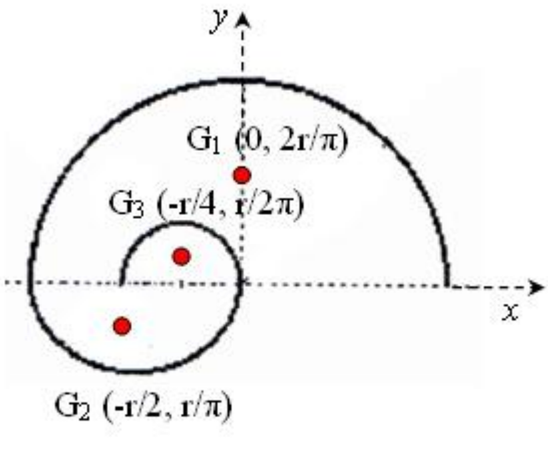
$$\begin{cases} x_{G2} = -\dfrac{r}{2} \\ y_{G2} = -\dfrac{2\left(\dfrac{r}{2}\right)}{\pi} \end{cases}$$

<u>demi-cercle 3</u>

$m_3 = \mu\pi \dfrac{r}{4}$

$$\begin{cases} x_{G3} = -\dfrac{r}{4} \\ y_{G2} = \dfrac{2\left(\dfrac{r}{4}\right)}{\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{m_1 x_{G1} + m_2 x_{G2} + m_3 x_{G3}}{m_1 + m_2 + m_3} \\ y_G = \dfrac{m_1 y_{G1} + m_2 y_{G2} + m_3 y_{G3}}{m_1 + m_2 + m_3} \end{cases}$$

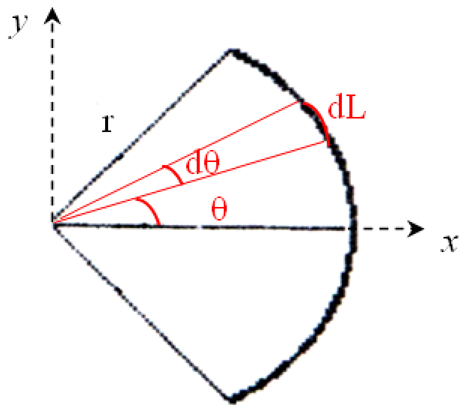


$$\begin{cases} x_G = \dfrac{-\mu\pi \dfrac{r}{2}\dfrac{r}{2} - \mu\pi \dfrac{r}{4}\dfrac{r}{4}}{\mu\pi r + \mu\pi \dfrac{r}{2} + \mu\pi \dfrac{r}{4}} \\ y_G = \dfrac{\mu\pi r \dfrac{2r}{\pi} - \mu\pi \dfrac{r}{2}\dfrac{r}{\pi} + \mu\pi \dfrac{r}{4}\dfrac{r}{2\pi}}{\mu\pi r + \mu\pi \dfrac{r}{2} + \mu\pi \dfrac{r}{4}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{-5r}{8} \\ y_G = \dfrac{13r^2}{3\pi} \end{cases}$$

3. Calcul des coordonnées du centre de masse d'un fil sous forme d'arc de cercle :

On choisi le repère (xoy) de manière que le fil soit symétrique par rapport a l'axe ox. Dans ce cas le centre de masse ce situe sur l'axe ox et $y_G = 0$:



Dans le cas d'un système continu : $x_G = \dfrac{\int x dm}{m}$

Comme $dm = \lambda dL$ (λ : densité linéaire)

$$x_G = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{x dL}{L}$$

$dL = r d\theta$, $L = 2r\alpha$ et $x = r\cos\theta$

$$x_G = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{r^2 \cos\theta d\theta}{2r\alpha}$$

Donc les coordonnées du centre de masse sont : $\begin{cases} x_G = \dfrac{r\sin\alpha}{\alpha} \\ y_G = 0 \end{cases}$

Exercice N°2 :

1. Centre de masse de la figure 1

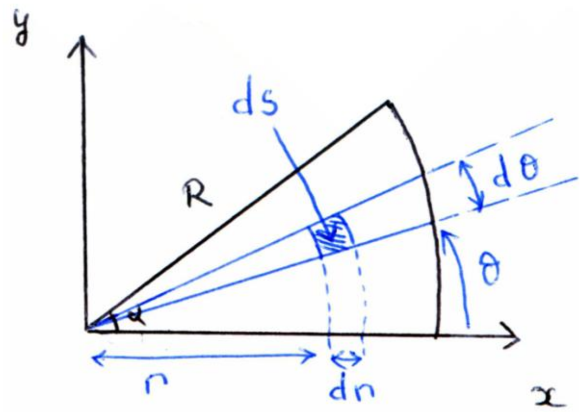
On choisi le repère (xoy) de manière que le fil soit symétrique par rapport a l'axe ox. Dans ce cas le centre de masse ce situe sur l'axe ox et $y_G=0$.

Dans le cas d'un système continu : $x_G = \dfrac{\int x dm}{m} \Rightarrow x_G = \dfrac{\int x dS}{S}$

$dS = r d\theta dr$, $x = r\cos\theta$

$$S = \iint r d\theta dr = \int_0^R r dr \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta = \alpha R^2$$

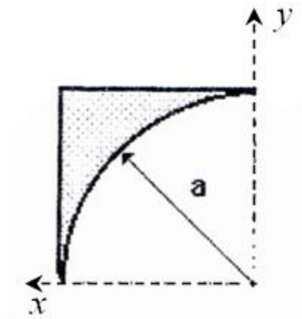
$$x_G = \frac{\int r\cos\theta r d\theta dr}{\alpha R^2} \Rightarrow \frac{\int_0^R r^2 dr \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta d\theta}{\alpha R^2}$$



Donc les coordonnées du centre de masse de la figure 1sont : $\begin{cases} x_G = \dfrac{2R\sin\alpha}{3\alpha} \\ y_G = 0 \end{cases}$

2. Centre de masse de la figure 2

La figure 2 est constitué d'un carré évidé d'un ¼ de cercle. On calcule d'abord le centre de masse du carré puis celui du ¼ de cercle, ensuite on déduit le centre de masse de la figure 2.



* Centre de masse du carré : $x_{G1} = \frac{a}{2}, y_{G1} = \frac{a}{2}, S_1 = a^2$

* Centre de masse d'un ¼ de cercle : $x_{G2} = \frac{4a}{3\pi}, y_{G2} = \frac{4a}{3\pi}, S_2 = \frac{\pi a^2}{4}$

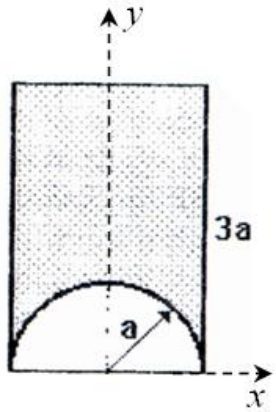
$$x_G = y_G = \frac{x_{G1}S_1 - x_{G2}S_2}{S_1 - S_2}\ ,\ x_G = y_G = \frac{\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}}{a^2 - \frac{\pi a^2}{4}}$$

Donc les coordonnées du centre de masse de la figure 2 sont : $x_G = y_G = \frac{2a}{3(4-\pi)}$

3. Centre de masse de la figure 3

On choisi le repère (*xoy*) de manière que la figure 3 soit symétrique par rapport a l'axe *oy*. Dans ce cas le centre de masse ce situe sur l'axe *oy* et $x_G=0$.

La figure 3 est constitué d'un rectangle évidé d'un ½ de cercle. On calcule d'abord le centre de masse du rectangle puis celui du ½ de cercle, ensuite on déduit le centre de masse de la figure 3.



* Centre de masse du rectangle : $x_{G1} = 0, y_{G1} = \frac{3a}{2}, S_1 = 6a^2$

* Centre de masse d'un ½ de cercle : $x_{G2} = 0, y_{G2} = \frac{2a}{\pi}, S_2 = \frac{\pi a^2}{2}$

$$y_G = \frac{x_{G1}S_1 - x_{G2}S_2}{S_1 - S_2}\ ,\ y_G = \frac{9a^3 - a^3}{6a^2 - \frac{\pi a^2}{2}}$$

Donc les coordonnées du centre de masse de la figure 2 sont : $\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = \frac{16a}{12-\pi} \end{cases}$

Exercice N°3 :

Calcul du volume du corps donné :

En utilisant le théorème de Guldin : le volume d'un corps peut être calculé par l'équation suivante : $V = 2\pi x_G A$

Où : A est la surface du corps et x_G est le centre de masse du corps.

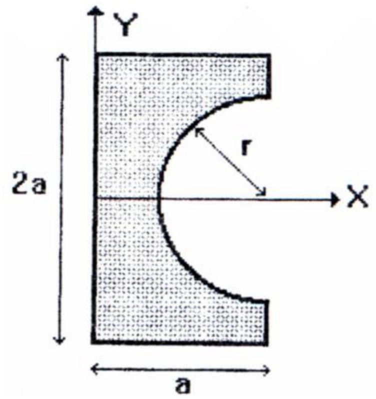
Le corps peut être considérer comme un rectangle moins un demi-cercle

La surface du rectangle : $S_1=2a^2$ et le son centre de masse : $x_{G1}=a$

La surface d'un ½ cercle : $S_2=\dfrac{\pi r^2}{2}$ et le son centre de masse : $x_{G2}=a-\dfrac{2r}{\pi}$

Donc $A=2a^2-\dfrac{\pi r^2}{2}$ et

$$x_G=\frac{2a^3-\frac{\pi r^2}{2}(a-\frac{2r}{\pi})}{2a^2-\frac{\pi r^2}{2}} \Rightarrow x_G=\frac{a}{2}+\frac{r^3}{4a^2-\pi r^2}$$



Exercice N°4 :

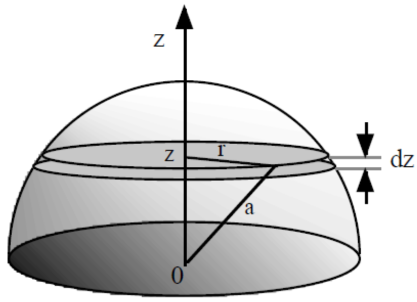
1. Calcul des coordonnées du centre de masse d'un hémisphère plein de rayon R

Par raison de symétrie le centre de masse se trouve sur l'axe oz , donc $x_G=y_G=0$

$$z_G=\frac{\int zdv}{\int dv} \text{ et } dv=\pi r^2 dz$$

L'équation d'un demi sphère est : $x^2+y^2+z^2=R^2$ donc $x^2+y^2=R^2-z^2$ et on a aussi $r^2=x^2+y^2$, ce qui nous permet d'écrire : $dv=\pi(R^2-z^2)dz$

$$z_G=\frac{\int_0^R \pi(R^2-z^2)zdz}{\int_0^R \pi(R^2-z^2)dz} \Rightarrow z_G=\frac{\left[R^2\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{4}\right]_0^R}{\left[R^2 z-\frac{z^3}{3}\right]_0^R}$$



Les coordonnées du centre de masse d'un hémisphère plein de rayon R sont : $\begin{cases} x_G=0 \\ y_G=0 \\ z_G=\dfrac{3R}{8} \end{cases}$

2. Calcul des coordonnées du centre de masse d'un hémisphère vide de rayon R

$z_G = \dfrac{\int zdm}{m}$ ou la masse élémentaire est donnée tel que : $dm = \sigma ds$

$ds = 2\pi r R d\theta$

$r = R\cos\theta$

$z = R\sin\theta$

La surface d'un hémisphère vide de rayon R : $S = 2\pi R^2$

$$z_G = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi R^3 \cos\theta \sin\theta d\theta}{2\pi R^2} \Rightarrow z_G = R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta$$

On pose : $x = \sin\theta$, donc $dx = \cos\theta d\theta$

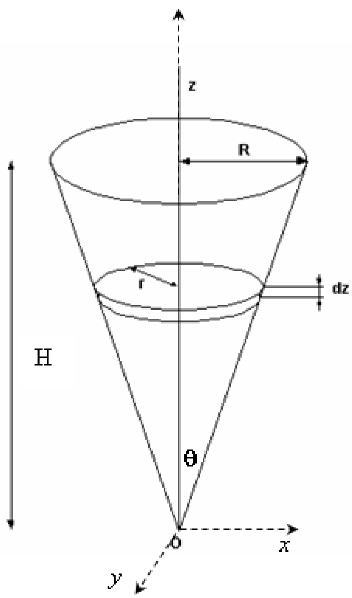
$$z_G = R\int xdx \Rightarrow z_G = R\frac{x^2}{2} \text{ donc } z_G = R\left[\frac{\sin\theta^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Les coordonnées du centre de masse d'un hémisphère vide de rayon R sont : $\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 0 \\ z_G = \dfrac{R}{2} \end{cases}$

3. Calcul des coordonnées du centre de masse d'un cône plein de rayon R et de hauteur H

On choisi le repère (*oxyz*) de manière que le cône soit symétrique par rapport a l'axe *oz*. Dans ce cas le centre de masse ce situe sur l'axe *oz* et $x_G = y_G = 0$.

$$z_G = \frac{\int zdm}{m} \Rightarrow z_G = \frac{\int zdv}{\int dv}$$



Ce cône possède une masse élémentaire $dm = \rho dv$. dv est le volume élémentaire tel que : $dv = \pi r^2 dz$ (volume pour un cylindre de hauteur *dz* et de rayon *r*).

$r = ztg\theta$

$dv = \pi z^2 tg\theta^2 dz$

Le volume d'un cône est : $V = \dfrac{2\pi}{3} HR^2$ ou on peut la calculer a partir de l'intégrale : $V = \int_0^H \pi z^2 tg\theta^2 dz$

$$z_G = \frac{\int_0^H \pi z^3 tg\theta^2 dz}{\int_0^H \pi z^2 tg\theta^2 dz} = \frac{\int_0^H z^3 dz}{\int_0^H z^2 dz}$$

Les coordonnées du centre de masse d'un cône plein de rayon R et de hauteur H

sont : $\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 0 \\ z_G = \dfrac{3H}{4} \end{cases}$

4. Calcul des coordonnées du centre de masse d'un cône vide de rayon R et de hauteur H

Par symétrie, il est immédiat que le centre de gravité du cône se trouve sur l'axe oz :

$$z_G = \frac{\int zdm}{m} \Rightarrow z_G = \frac{\int zds}{\int ds}$$

La surface élémentaire d'un cône est tel que : $ds = \pi z dz$ et la surface est : $S = \pi R(R + a)$ ou

$a = \sqrt{R^2 + H^2}$

$$z_G = \frac{\int_0^H z^2 dz}{\int_0^H z dz} \Rightarrow z_G = \frac{\left[\dfrac{z^3}{3}\right]_0^H}{\left[\dfrac{z^2}{2}\right]_0^H}$$

Les coordonnées du centre de masse d'un cône vide de rayon R et de hauteur H

sont : $\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 0 \\ z_G = \dfrac{2H}{3} \end{cases}$