السلسلة رقم 04 (المتغيرات العشوائية الثنائية)

التمرين الأول:

لتكن الدالة:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(6-x-y) & 0<x<2;2<y<4\\ 0 & o/w\end{cases}$$

1- بين أنها دالة كثافة احتمالية مشتركة.

2- احسب الاحتمال $P(X<1,Y>3)$

3- احسب دالة التوزيع التجميعية المشتركة.

الحل:

1- لكي تكون الدالة $f(x,y)$ دالة كثافة احتمالية يجب أن تحقق الشروط التالية:

a) $"f(x;y)\geq 0 \quad (x,y\in R$

b) $\iint_R (x,y)dxdy=1$

ومن الواضح ان الشرط الاول محقق على مجال تعريف الدالة $f(x,y)$، لجميع قيم x و y في مجال التعريف. وكذلك فإن:

$$\iint_R (x,y)dxdy=\int_0^2\int_2^4 \frac{1}{8}(6-x-y)dydx$$

$$=\int_0^2\left[\frac{6y}{8}-\frac{xy}{8}-\frac{y^2}{16}\right]_2^4 dx$$

$$=\int_0^2\left[\frac{3}{4}-\frac{x}{4}\right]dx=1$$

ومنه فإن الدالة $f(x,y)$ هي دالة كثافة احتمالية.

2- حساب الاحتمال $P(X<1,Y>3)$

$$P(X<1,Y>3)=\int_0^1\int_3^4 \frac{1}{8}(6-x-y)dydx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{6y}{8} - \frac{xy}{8} - \frac{y^2}{16}\right]_3^4 dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{5}{16} - \frac{x}{8}\right] dx = \frac{1}{4}$$

3- من تعريف دالة التوزيع التجميعية المشتركة فإن:

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(t,z)dtdz$$

بالنسبة إلى المجال $x \le 0; y \le 2$

و $f(t,z) = 0$ بالنسبة إلى $t \le x; z \le y$ وكذلك فإن $F(x,y) = 0$ بالنسبة إلى $x \le 0; y \le 2$

وبالنسبة إلى المجال $0 < x < 2; 2 < y < 4$ نحصل على:

$$F(x,y) = \int_0^x \int_2^y \frac{1}{8}(6 - t - z)dtdz$$

$$F(x,y) = \int_0^x \frac{1}{8}\left\{(6-t)(y-2) - \frac{y^2}{2} + 2\right\}dz$$

$$F(x,y) = \frac{1}{16}x(y-2)(10-y-x)$$

وبالنسبة إلى $0 < x < 2; y \ge 4$ فإن:

$$F(x,y) = \int_0^x \int_2^4 \frac{1}{8}(6 - t - z)dtdz = \frac{1}{8}x(6-x)$$

وبالنسبة إلى المجال $x \ge 2; 2 < y < 4$ فإن:

$$F(x,y) = \int_0^2 \int_2^y \frac{1}{8}(6 - t - z)dtdz = \frac{1}{8}(y-2)(8-y)$$

وأخيرا بالنسبة للمجال $x \ge 2; y \ge 4$ فإن:

$$F(x,y) = \int_0^2 \int_2^4 \frac{1}{8}(6 - t - z)dtdz = 1$$

وبالتالي فإن دالة التوزيع التجميعية تكون على الشكل:

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & x\le 0;y\le 2\\ \frac{1}{16}x(y-2)(10-y-x) & 0<x<2;2<y<4\\ \frac{1}{8}x(6-x) & 0<x<2;y\ge 4\\ \frac{1}{8}(y-2)(8-y) & x\ge 2;2<y<4\\ 1 & x\ge 2;y\ge 4\end{cases}$$

التمرين الثاني:

يعرض الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة للمتغيرين العشوائيين x و y، حيث

		X			
		−2	0	2	3
Y	3	0.27	0.08	0.16	0
	6	0	0.04	0.10	0.35

المطلوب:

1- أحسب دالة التوزيع الاحتمالية الهامشية للمتغيرين x و y .

2- أحسب دالة التوزيع التجميعية الهامشية للمتغيرين x و y .

الحل:

1- حساب دالة التوزيع الاحتمالية الهامشية للمتغير العشوائي x:

$$\mathrm{f}_1(\mathrm{x}=-2)=\sum_y f(x,y)=0.27+0=0.27$$

$$\mathrm{f}_1(\mathrm{x}=0)=\sum_y f(x,y)=0.08+0.04=0.12$$

$$\mathrm{f}_1(\mathrm{x}=2)=\sum_y f(x,y)=0.16+0.10=0.26$$

$$\mathrm{f}_1(\mathrm{x}=2)=\sum_y f(x,y)=0+0.35=0.35$$

ولحساب دالة التوزيع الاحتمالية الهامشية للمتغير العشوائي y، بنفس الطريقة نجد:

$$f_2(y=3)=\sum_x f(x,y)=0.27+0.08+0.16+0=0.51$$

$$f_2(y=6)=\sum_x f(x,y)=0+0.04+0.10+0.35=0.49$$

2- حساب دالة التوزيع التجميعية للدالتين $f_1(x)$ و $f_2(y)$ للمتغيرين x و y كما يلي:

x	**-2**	**0**	**2**	**3**
$\mathbf{f_1(x)}$	0,27	0,12	0,26	0,35
$\mathbf{F_1(x)}$	0,27	0,39	0,65	1
y	**3**	**6**		
$\mathbf{f_2(y)}$	0,51	0,49		
$\mathbf{F_2(y)}$	0,51	1		

التمرين الثالث:

باستخدام جدول **التمرين رقم 2** احسب:

		X			
		-2	0	2	3
Y	3	0.27	0.08	0.16	0
	6	0	0.04	0.10	0.35

1- الاحتمال الشرطي $P(X=-2/Y=3)$

2- الاحتمال الشرطي $P(X=2/Y=6)$

3- هل هذان المتغيران مستقلين؟

الحل:

1-

$$P(X=-2/Y=3)=\frac{P(X=-2,Y=3)}{P(Y=3)}=\frac{0.27}{0.51}=0.53$$

نلاحظ أن الاحتمال غير المشروط *P(x=-2)* هو 0.27، ولكن إذا افترض أن لـ *Y* القيمة 3، فإن احتمال أن يأخذ *X* قيمة -2 هو 0.53.

2-

$$P(X=2/Y=6)=\frac{P(X=2,Y=6)}{P(Y=6)}=\frac{0.1}{0.49}=0.20$$

نلاحظ أن الاحتمال غير المشروط P(x=2) هو 0.2، ولكن هذا الاحتمال يصبح 0.20 إذا افترضنا أن لـ Y القيمة 6.

-3

انطلاقا من العلاقة

$$P(x,y) = P_x(x).P_y(y)$$

يتضح لنا جليا أن المتغيرين غير مستقلان، فمثلا

$$P_x(x=-2).P_y(y=3) = 0.27 * 0.51 = 0.1377$$

$$P(x=-2, y=3) = 0.27$$

إذن

$$P(x,y) \neq P_x(x).P_y(y)$$

ومنه فالمتغيرين x، y غير مستقلين.

التمرين الرابع:

لتكن دالة التوزيع الاحتمالي التالية:

$$f(x,y) = 2 - x - y \quad 0 \leq x \leq 1; \quad 0 \leq y \leq 1$$

المطلوب:

1- بين أنها دالة كثافة احتمالية مشتركة.

2- احسب دالة التوزيع التجميعية المشتركة.

3- أحسب دالة التوزيع الاحتمالية الهامشية للمتغيرين x و y .

4- أحسب دالة التوزيع التجميعية الهامشية للمتغيرين x و y .

الحل:

1- لكي تكون الدالة $f(x,y)$ دالة كثافة احتمالية يجب أن تحقق الشروط التالية:

c) $"f(x;y) \geq 0 \quad (x,y \in R$

d) $\iint_R (x,y)dxdy = 1$

ومن الواضح ان الشرط الاول محقق على مجال تعريف الدالة $f(x,y)$، لجميع قيم x وy في مجال التعريف. وكذلك فإن:

$$\int_0^1 \int_0^1 (2 - x - y)dxdy = \int_0^1 \left[2x - \frac{x^2}{2} - xy\right]_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{3}{2} - y\right) dy$$

$$= \left[\frac{3y}{2} - \frac{y^2}{2}\right]_0^1$$

$$= 1$$

ومنه فإن الدالة $f(x,y)$ هي دالة كثافة احتمالية.

2- دالة التوزيع التجميعية المشتركة

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}(2-t-z)dtdz = \int_0^y \left[2t - \frac{t^2}{2} - tz\right]_0^x dz = \int_0^y \left(2x - \frac{x^2}{2} - xz\right) dz$$

$$= \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{xz^2}{2}\right]_0^y = -\frac{xy^2}{2}$$

وعليه تصبح دالة التوزيع على النحو التالي:

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 0; y < 0 \\ -\frac{xy^2}{2} & 0 \le x \le 1; \quad 0 \le y \le 1 \\ 1 & x \ge 1; y \ge 1 \end{cases}$$

3- دالة التوزيع الاحتمالية الهامشية للمتغيرين x و y .

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 (2-x-y)dy = \left[2y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2} - x \quad ; 0 \le x \le 1$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^1 (2-x-y)dx = \left[2x - xy - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2} - y \quad ; 0 \le y \le 1$$

4- دالة التوزيع التجميعية الهامشية للمتغيرين x و y .

$$F_1(x) = F(x,\infty) = \int_{-\infty}^{x} f_1(u)du = \int_0^x \left(\frac{3}{2} - u\right) du = \left[\frac{3}{2}u - \frac{u^2}{2}\right]_0^x = \frac{3}{2}x - \frac{x^2}{2}$$

$$F_2(y) = F(\infty,y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(v)dv = \int_0^y \left(\frac{3}{2} - v\right) dv = \left[\frac{3}{2}v - \frac{v^2}{2}\right]_0^x = \frac{3}{2}y - \frac{y^2}{2}$$

التمرين الخامس:

باستخدام معطيات الجدول الخاص بالتمرين رقم 2.

المطلوب:

1- المتوسط والتباين للمتغيرين x و y.

2- معامل الارتباط بين المتغيرين x و y.

الحل:

1- المتوسط والتباين للمتغيرين x و y.

$$E(x) = \sum xf(x) = (-2)(0.27) + (0)(0.12) + (2)(0.26) + (3)(0.35)$$

$$E(x) = 1.03$$

$$E(y) = \sum yf(y) = (3)(0.51) + (6)(0.49)$$

$$E(y) = 4.47$$

$$V(x) = \sum (x - \mu_x)^2 f(x)$$

$$= (-2 - 1.03)^2(0.27) + (0 - 1.03)^2(0.12) + (2 - 1.03)^2(0.26) + (3 - 1.03)^2(0.35)$$

$$V(x) = 4.2$$

$$V(y) = \sum (y - \mu_y)^2 f(y)$$

$$= (3 - 4.47)^2(0.51) + (6 - 4.47)^2(0.49)$$

$$V(y) = 2.25$$

2- معامل الارتباط بين المتغيرين x و y.

أولا يجب حساب معامل التغاير $cov(x, y)$

$$cov(x, y) = \sum_y \sum_x (x - \mu_x)(y - \mu_y) f(x, y)$$

$$= \sum_y \sum_x (x)(y) f(x, y) - \mu_x \mu_y$$

$$E(xy) = (-2)(3)(0.27) + (0)(3)(0.08) + (2)(3)(0.16) + (3)(3)(0) + (-2)(6)(0) + (0)(6)(0.04) + (2)(6)(0.10) + (3)(6)(0.35)$$

$$E(xy) = 6.84$$

$$cov(x, y) = E(xy) - \mu_x \mu_y$$

$$cov(x, y) = 6.84 - (1.03)(4.47)$$

$$cov(x, y) = 2.24$$

معامل الارتباط بين المتغيرين x و y هو:

$$p_{xy} = \frac{cov(x, y)}{\sqrt{V(x)V(y)}} = \frac{2.24}{\sqrt{4.2 * 2.25}} = 0.73$$